

## Corso di ALGEBRA (M-Z)

2015-16

### INSIEMI PARZIALMENTE ORDINATI E RETICOLI

Sia  $P$  un insieme non vuoto. Una relazione d'ordine  $\leq$  su  $P$  è una relazione riflessiva, antisimmetrica e transitiva. La coppia  $(P, \leq)$  si dice *insieme parzialmente ordinato (p.o.)*. Il *duale* di  $(P, \leq)$  è l'insieme p.o.  $(P, \geq)$ , dove  $\geq$  è la relazione duale di  $\leq$  che è anch'essa una relazione d'ordine. Due elementi  $x, y$  di  $P$  si dicono *confrontabili* se risulta  $x \leq y$  oppure  $y \leq x$ , in particolare  $x \leq y$  e  $x \neq y$  sarà indicato con  $x < y$ . Un insieme parzialmente ordinato tale che ogni coppia di suoi elementi sia confrontabile si dice *totalmente ordinato* o *catena*, la *lunghezza di una catena* è il numero dei suoi elementi diminuito di una unità.

L'insieme  $[a, b] = \{x \in P : a \leq x \leq b\}$  si dice *intervallo di estremi  $a, b$* ; se l'intervallo  $[a, b]$  ( $a \neq b$ ) è costituito solo da  $a$  e  $b$  si dice che  $b$  *copre*  $a$  (o che  $a$  è *coperto da*  $b$ ), in simboli  $a < \bullet b$ . Dati  $x, y \in P$ , si definisce *estremo inferiore* di  $x$  e  $y$  l'elemento  $\inf(x, y)$  di  $P$  tale che

$$(I1) \inf(x, y) \leq x \quad \text{e} \quad \inf(x, y) \leq y,$$

$$(I2) \text{ se } z \in P, \quad z \leq x \quad \text{e} \quad z \leq y \quad \text{allora} \quad z \leq \inf(x, y).$$

Si definisce *estremo superiore* di  $x$  e  $y$  l'elemento  $\sup(x, y)$  di  $P$  tale che

$$(S1) x \leq \sup(x, y) \quad \text{e} \quad y \leq \sup(x, y),$$

$$(S2) \text{ se } z \in P, \quad x \leq z \quad \text{e} \quad y \leq z \quad \text{allora} \quad \sup(x, y) \leq z.$$

Ovviamente l'estremo inferiore di  $x$  e  $y$ , se esiste, è unico, come pure è unico l'estremo superiore.

Siano  $(P_1, \leq_1)$  e  $(P_2, \leq_2)$  insiemi p.o., un *morfismo di insiemi p.o.* (o *funzione monotona*) è una applicazione  $f: P_1 \rightarrow P_2$  tale che se  $x \leq_1 y$  allora  $f(x) \leq_2 f(y)$ , quando il morfismo è biiettivo (*isomorfismo*) i due insiemi p.o. si dicono *isomorfi*.

Un insieme parzialmente ordinato  $(P, \leq)$  con  $0$  può essere rappresentato graficamente attraverso un diagramma (*diagramma di Hasse*) i cui punti corrispondono biunivocamente agli elementi di  $P$  in modo che per ogni coppia  $(x, y)$  di elementi distinti si abbia:

i) se  $x \leq y$  allora il punto  $x$  è più in basso del punto  $y$ ,

ii) se  $y$  copre  $x$  allora i punti  $x$  ed  $y$  sono uniti da un segmento.

Il *prodotto* di due insiemi parzialmente ordinati  $(P_1, \leq_1)$  e  $(P_2, \leq_2)$  è l'insieme p.o.  $(P_1 \times P_2, \leq)$  dove la relazione d'ordine è definita da:

$$(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) : \text{se e solo se } x_1 \leq_1 y_1 \quad \text{e} \quad x_2 \leq_2 y_2.$$

In generale data una famiglia di insiemi p.o.  $\{(P_i, \leq_i)\}_{i \in I}$ , l'*insieme p.o. prodotto*  $(\prod_{i \in I} P_i, \leq)$  è definito da:

$$\{x_i\}_{i \in I}, \{y_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} P_i, \{x_i\}_{i \in I} \leq \{y_i\}_{i \in I} : \text{se e solo se } x_i \leq_i y_i \text{ per ogni } i \in I.$$

Si osservi che, se  $(P, \leq)$  è un insieme p.o. e  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  un insieme con  $n$  elementi, è possibile definire una relazione d'ordine sull'insieme  $P^X$  delle funzioni da  $X$  in  $P$  ponendo:

$$f \leq g : \text{se e solo se } (f(x_1), \dots, f(x_n)) \leq (g(x_1), \dots, g(x_n)) \text{ nell'insieme prodotto } (P^n, \leq).$$

Pertanto la funzione  $F : (2^X, \subseteq) \rightarrow (\{0, 1\}^X, \leq)$  che ad ogni sottoinsieme  $A$  di  $X$  associa la sua funzione caratteristica  $\phi_A$  (per ogni  $i = 1, \dots, r$ ,  $\phi_A(x_i) = 0$  se  $x_i \notin A$ ,  $\phi_A(x_i) = 1$  se  $x_i \in A$ ) è un isomorfismo di insiemi p.o.

**Reticoli come insiemi parzialmente ordinati.** Un reticolo  $(L, \leq)$  è un insieme p.o. tale che ogni coppia di elementi ha un estremo inferiore ed un estremo superiore.

Un morfismo di reticoli è una funzione monotona  $f: (L, \leq) \rightarrow (L', \leq)$  tale che :

$$f(\inf(x, y)) = \inf(f(x), f(y)) \quad \text{e} \quad f(\sup(x, y)) = \sup(f(x), f(y)), \text{ per ogni } x, y \in L$$

Due reticoli si dicono isomorfi se è possibile definire tra di essi un morfismo di reticoli biiettivo (*isomorfismo di reticoli*).

Si osservi che l'insieme p.o.  $(L, \geq)$ , duale di un reticolo, è anch'esso un reticolo in quanto, ponendo per ogni  $x, y$  in  $L$  :  $\inf^*(x, y) = \sup(x, y)$  e  $\sup^*(x, y) = \inf(x, y)$ , si ha :



Rimane da dimostrare che per ogni  $x, y \in L$  si ha :

$$\inf(x, y) = x \wedge y \text{ e } \sup(x, y) = x \vee y.$$

Infatti:

$$(I1) : (x \wedge y) \wedge x = (x \wedge x) \wedge y = x \wedge y \Rightarrow x \wedge y \leq x \text{ e analogamente } x \wedge y \leq y$$

$$(I2) : \text{sia } z \leq x \text{ e } z \leq y \text{ allora } z \wedge x = z = z \wedge y \text{ e quindi } (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) = x \wedge y \Rightarrow z \leq (x \wedge y) .$$

Inoltre:

**Lemma.** Si ha:  $x \leq y$  se e solo se  $(x \vee y) = y$ .

*Dim.* Sia  $x \leq y$ . Allora per L4  $y = y \vee (x \wedge y) = y \vee x$ . Viceversa se  $y = x \vee y$ , si ha  $x = x \wedge (x \vee y) = x \wedge y$  e quindi  $x \leq y$ .

Tenendo conto del lemma e ripercorrendo le dimostrazioni fatte per l'inf, si ha:

$$(S1) \quad x \leq x \vee y \text{ e } y \leq x \vee y$$

$$(S2) \quad \text{se } z \in L, \quad x \leq z \text{ e } y \leq z \text{ allora } x \vee y \leq z.$$

e quindi  $\sup(x, y) = x \vee y$ . □

Si osservi che un morfismo di reticoli come strutture algebriche  $f: (L, \wedge, \vee) \rightarrow (L', \wedge, \vee)$ , ossia un'applicazione  $f$  tale che:

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \text{ e } f(x \vee y) = f(x) \vee f(y),$$

è anche un morfismo di insiemi p.o., invece un morfismo di insiemi p.o., ossia una funzione monotona da  $L$  in  $L'$ , non necessariamente è un morfismo di reticoli.

In ogni reticolo  $(L, \wedge, \vee)$  è vera la *disuguaglianza modulare*:

$$(LM) \quad \text{Per ogni } x, z \in L \text{ con } x \leq z \text{ risulta : } x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z.$$

*Dim.*  $(x \vee y) \wedge z$  è un maggiorante sia di  $x$  che  $(y \wedge z)$  e quindi è maggiore del loro estremo superiore  $x \vee (y \wedge z)$ . □

Si osservi che l'enunciato (LM) è autoduale.

In ogni reticolo  $(L, \wedge, \vee)$  valgono inoltre le disuguaglianze distributive per ogni  $x, y, z \in L$  :

$$(LD)_1 \quad x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

$$(LD)_2 \quad (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$$

*Dim.* Le due disuguaglianze sono una duale dell'altra, pertanto basta dimostrare la  $(LD)_1$ . Poiché  $x \vee (y \wedge z) = \sup(x, y \wedge z)$  basta dimostrare che:

$$x \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z) \text{ e } (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Infatti  $x \leq (x \vee y)$  e  $x \leq (x \vee z)$  e quindi  $x$  è minore di  $(x \vee y) \wedge (x \vee z)$ . Inoltre  $(y \wedge z) \leq y \leq (x \vee y)$  e  $(y \wedge z) \leq z \leq (x \vee z)$  da cui  $(y \wedge z)$  è minore di  $(x \vee y) \wedge (x \vee z)$ .

### Alcuni reticoli fondamentali

Nel seguito una catena di lunghezza  $n$ , ossia una catena costituita da  $(n+1)$  elementi, sarà indicata con  $\mathcal{C}(n)$ , poiché catene della stessa lunghezza risultano isomorfe. Ogni catena è ovviamente un reticolo.

#### 1. La catena dei numeri naturali $\mathbb{N}$ ordinati dalla relazione naturale.

## 2. Il reticolo $(\mathbf{N}^*, |)$ dei numeri interi positivi ordinati dalla relazione di divisibilità.

La relazione  $|$  è definita da:

$$m | n \Leftrightarrow m \text{ divide } n : \Leftrightarrow \text{esiste un intero positivo } k \text{ tale che } n = km.$$

Risulta:

$$m \wedge n := \text{massimo comun divisore tra } m \text{ e } n = \text{MCD}(m,n),$$

$$m \vee n := \text{minimo comune multiplo tra } m \text{ ed } n = \text{mcm}(m,n).$$

## 3. Il reticolo $\mathcal{M}(\mathbf{R})$ dei multinsiemi finiti di un insieme $\mathbf{R}$ .

Ricordiamo che un multinsieme di  $\mathbf{R}$  è una applicazione  $M$  da  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{N}$ . Il reticolo  $\mathcal{M}(\mathbf{R})$  è un sottoreticolo del reticolo di tutti i multinsiemi di  $\mathbf{R}$ , dove se  $M, M'$  sono multinsiemi di  $\mathbf{R}$ , si ha:

$$M \leq M' : \Leftrightarrow M(x) \leq M'(x) \text{ per ogni } x \in \mathbf{R}$$

$$M \wedge M'(x) := \inf(M(x), M'(x))$$

$$M \vee M'(x) := \sup(M(x), M'(x)).$$

Risulta :

- i) Se  $|\mathbf{R}| = r < \infty$ , il reticolo  $\mathcal{M}(\mathbf{R})$  è isomorfo al reticolo  $\mathbf{N}^r$  ottenuto come prodotto di  $r$  copie della catena dei numeri naturali  $\mathbf{N}$ , pertanto il reticolo dei multinsiemi di un  $r$ -insieme sarà indicato con  $\mathcal{M}(r)$ , (fig.3.1).
- ii) Se  $|\mathbf{R}| = |\mathbf{N}|$ , il reticolo  $\mathcal{M}(\mathbf{R})$  dei multinsiemi finiti di  $\mathbf{R}$  è isomorfo al reticolo  $(\mathbf{N}^*, |)$  degli interi positivi ordinati dalla divisibilità.

*Dim . i).* Sia  $\mathbf{R} = \{1, \dots, r\}$ . L'isomorfismo  $\phi : \mathcal{M}(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{N}^r$  è definito da:  $\phi(M) = (M(1), \dots, M(r))$

*Dim. ii).* In questo caso  $\mathbf{R}$  è numerabile e dunque si può supporre  $\mathbf{R} = \mathbf{N}$ . Ricordiamo che i numeri primi sono infiniti in quanto se per assurdo fossero in numero finito:  $p_1, \dots, p_h$ , l'intero  $n = (\prod p_i) + 1$ , primo con ogni  $p_i$ , non sarebbe primo. Sia dunque  $\{p_i\}_{i \in \mathbf{N}}$  la successione dei numeri primi. L'isomorfismo

$\phi : \mathcal{M}(\mathbf{R}) \rightarrow (\mathbf{N}^*, |)$  associa ad ogni multinsieme finito  $M$  il numero naturale  $m = \prod_{i \in \mathbf{N}} p_i^{M(i)}$ .

□

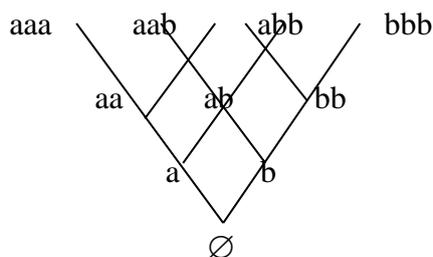


Fig.3.1: diagramma di Hasse di  $\mathcal{M}(\{a,b\})$

## 4. L'algebra booleana $\mathcal{B}(r)$ di rango $r$ .

Sia  $\mathbf{R}$  un insieme non vuoto, l'insieme  $\mathcal{B}(\mathbf{R})$  di tutti i sottoinsiemi finiti di  $\mathbf{R}$  risulta un sottoreticolo del reticolo  $(2^{\mathbf{R}}, \subseteq)$  dei sottoinsiemi di  $\mathbf{R}$ , dove l'operazione di  $\inf$  è l'intersezione e quella di  $\sup$  è l'unione. Se  $|\mathbf{R}| = r < \infty$ , allora  $\mathcal{B}(\mathbf{R}) \cong \mathcal{C}(1)^r$  dove  $\mathcal{C}(1)$  denota il reticolo prodotto di  $r$  copie delle catena  $\mathcal{C}(1)$ . Infatti, ordinati gli elementi di  $\mathbf{R} = \{x_1, \dots, x_r\}$ , l'applicazione  $\phi$  che ad ogni sottoinsieme  $A$  associa la  $r$ -pla  $\phi(A) = (\phi_A(x_1), \dots, \phi_A(x_r))$  determinata dalla  $\phi_A$ , funzione caratteristica di  $A$ , è un isomorfismo di reticoli. L'algebra booleana di rango  $r$  è il reticolo  $\mathcal{B}(r)$  dei sottoinsiemi di un insieme con  $r$  elementi.

## 5. Reticolo delle partizioni di un insieme.

Sia  $A$  un insieme non vuoto. L'insieme delle partizioni di  $A$  è ordinato dalla relazione di raffinamento definita come segue. Siano  $\pi, \sigma$  partizioni di  $A$  e  $(\pi), (\sigma)$  le relazioni di equivalenza da esse determinate, si ha:

$\pi \leq \sigma \Leftrightarrow a(\pi)b$  implica  $a(\sigma)b$ , per ogni  $a, b \in A \Leftrightarrow$  ogni blocco di  $\pi$  è contenuto in un blocco di  $\sigma$   
 $\Leftrightarrow$  ogni blocco di  $\sigma$  è unione di blocchi di  $\pi$ .

Inoltre la partizione  $\pi \wedge \sigma$  è determinata dalla relazione di equivalenza:

$$a(\pi \wedge \sigma)b \Leftrightarrow a(\pi)b \text{ e } a(\sigma)b,$$

mentre la partizione  $\pi \vee \sigma$  è determinata da:

$a(\pi \vee \sigma)b : \Leftrightarrow$  esistono  $u_1, \dots, u_k \in A$  tali che  $u_1 = a$  e  $u_k = b$  e per ogni  $i = 1, \dots, k-1$   $u_i(\pi)u_{i+1}$  oppure  $u_i(\sigma)u_{i+1}$ .

Si indichi con  $\mathcal{R}(A)$  il sottoreticolo costituito dalle partizioni di  $A$  con un numero finito di blocchi. Dati due insiemi finiti con la stessa cardinalità  $n$ , i rispettivi reticoli delle partizioni risultano isomorfi, pertanto è possibile definire il reticolo delle partizioni  $\mathcal{R}(n)$  di ordine  $n$  ( $< \infty$ ).

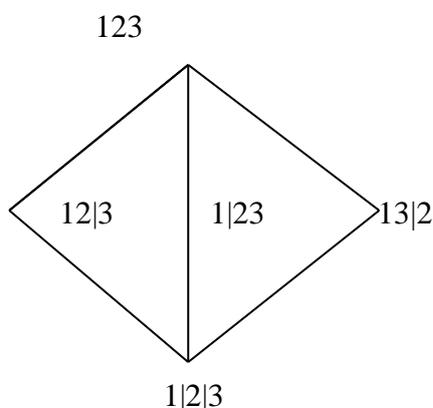


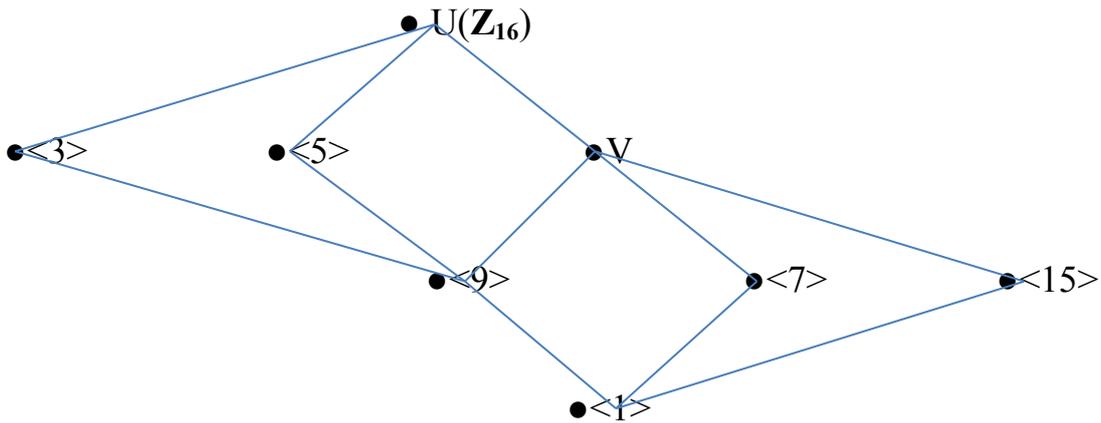
Fig.3.2: Il reticolo  $\mathcal{R}(3)$

**Teorema.(Pudlák-Tůma).** Ogni reticolo finito è isomorfo ad un sottoreticolo del reticolo delle partizioni  $\mathcal{R}(n)$ .

**Esempio 6. Reticolo dei sottospazi  $\mathcal{L}(n, K)$  di uno spazio  $n$ -dimensionale su un campo  $K$ .**

**Esempio 7. Reticolo dei sottogruppi di un gruppo  $(G, \bullet)$ .**

La relazione d'ordine è l'inclusione. Dati due sottogruppi  $H, K$  allora  $H \wedge K$  è l'intersezione dei due sottogruppi. Il sottogruppo  $H \vee K$  è il sottogruppo generato dall'unione  $H \cup K$ , ossia è l'intersezione di tutti i sottogruppi contenenti l'insieme  $H \cup K$ .



Il reticolo dei sottogruppi del gruppo  $U(\mathbf{Z}_{16})$  degli elementi invertibili dell'anello  $(\mathbf{Z}_{16}, +, \cdot)$ .

**Esempio 8. Reticolo dei sottoanelli di un anello  $(A, +, \cdot)$ .**

La relazione d'ordine è l'inclusione. Dati due sottoanelli  $S, R$  allora  $S \wedge S$  è l'intersezione dei due sottoanelli. Il sottoanello  $S \vee R$  è il sottogruppo generato dall'unione  $S \cup R$ , ossia è l'intersezione di tutti i sottoanelli contenenti l'insieme  $S \cup R$ .