CORSO DI ALGEBRA (M-Z)

Prof. A. Venezia

2015-16

Complementi ed Esercizi

1. AUTOVETTORI e AUTOVALORI di ENDOMORFISMI e MATRICI

Una applicazione lineare avente per dominio e condominio lo stesso spazio vettoriale V si dice *endomorfismo di* V.

PROPOSIZIONE 1.1. Siano V, V' e V'' spazi vettoriali sullo stesso campo K, e B, B',B''le rispettive basi. Date due applicazioni lineari L: V→V' e G : V'→ V'', la matrice associata alla composta G ○ L rispetto alle basi B e B'' è il prodotto della matrice associata a G rispetto alle basi B' e B'' per la matrice associata a L rispetto alle basi B e B'. In simboli:

$$M^{B}_{B''}(G\circ L) = M^{B'}_{B''}(G)\, M^{B}_{B'}(L).$$

Dim. Si ha per definizione di matrice associata ad una applicazione lineare :

$$1.1.1.\ (G \circ L)(v) = B''\ M^{B}_{B''}(G\circ L)\, X, \text{ dove } v = BX,$$

$$L(v) = B'X' = B'\ M^{B}_{B'}(L)X$$

$$G(v') = B''\ M^{B'}_{B''}(G)X', \text{ dove } v' = B'X'.$$

Dunque:

$$(G \circ L)(v) = G(L(v)) = B''\ M^{B'}_{B''}(G)\, M^{B}_{B'}(L)X,$$

pertanto confrontando con la (1.1.1): $M^{B}_{B''}(G\circ L) = M^{B'}_{B''}(G)\, M^{B}_{B'}(L)$.

$\square$

Dato un endomorfismo L: V→V, si indichi con $M_B(L)$ la matrice associata ad L rispetto alla base B = $\{v_1, v_2,\ldots v_n\}$ di V (quindi la sua j-esima colonna è costituita dalle coordinate di $L(v_j)$ rispetto alla base B). Siano B' $=\{w_1,\ldots,w_n\}$ un'altra base di V e $M_{B'}(L)$ la matrice associata ad L rispetto a B', si ha la seguente identità:

$$M_{B'}(L) = M^{B}_{B'}(id)\, M_B(L)\, M^{B'}_{B}(id)$$

dove $M^{B}_{B'}(id)$ è la matrice associata all'endomorfismo identico rispetto alle basi B e B' e $M^{B'}_{B}(id)$ è la sua inversa. Infatti dalla proposizione precedente si ha:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\text{V con B'} \arrow[r, "L \leftrightarrow M_{B'}(L)"] \arrow[d, "id(V)\leftrightarrow M^{B'}_{B}(id)"'] & \text{V con B'} \\
\text{V con B} \arrow[r, "L \leftrightarrow M_{B}(L)"'] & \text{V con B} \arrow[u, "id(V)\leftrightarrow M^{B}_{B'}(id)"']
\end{tikzcd}$$

Due matrici quadrate dello stesso ordine A e A'' si dicono *simili* se esiste una matrice P invertibile tale che : $A' = P^{-1}A\ P$. Quindi due matrici che rappresentano lo stesso endomorfismo sono simili. La similitudine tra matrici è una relazione di equivalenza (dimostrarlo!) e si ha la fondamentale caratterizzazione:

PROPOSIZIONE 1.2. Dato uno spazio vettoriale V su K con dim V = n, due matrici di ordine n ad elementi in K sono simili se e solo se rappresentano lo stesso endomorfismo di V.

Dim. Rimane da dimostrare che la condizione è necessaria. Sia dunque per ipotesi $A' = P^{-1}A\ P$ dimostriamo che A'e A rappresentano lo stesso endomorfimo di V. Sia B una base di V e sia L l'endomorfismo tale che $M_B(L) = A$. L'insieme B' = B P è una base di K^n e le coordinate X' di un vettore rispetto a B' sono date da $X' = M^B{}_{B'}(id)\ X = P^{-1}X$, da cui: $M_{B'}(L) = M^B{}_{B'}(id)\ M_B(L)\ M^{B'}{}_B(id) = P^{-1}A\ P = A'$ cioè A' è la matrice che rappresenta L rispetto a B'.

□

Pertanto:

1. Matrici simili hanno lo stesso rango (perché?).
2. Matrici simili hanno lo stesso determinante (dal Teorema di Binet).

Dim. 2.

Risulta : det (AB) = det(A) det(B) (teorema di Binet). Dunque se A' e A sono matrici simili si ha: $A' = P^{-1}A\ P$, da cui $\det(A') = \det(P^{-1})\det(A)\det(P)$ e quindi la tesi poichè $\det(P^{-1})\det(P) = 1$.

Sia L: V → V un endomorfismo. Un *autovettore di* L *di autovalore* λ è un vettore v non nullo tale che $L(v) = \lambda v$. Lo scalare si dice *autovalore di* L relativo all'autovettore v.

L'insieme $E(\lambda) = \{ v \in V : L(v) = \lambda v \}$ è un sottospazio di V (dimostrarlo!) che è chiamato *autospazio* e la sua dimensione $m_g(\lambda)$ è detta *molteplicità geometrica dell'autovalore* λ. Si osservi che l'endomorfismo L ha come autospazio E(0) se e solo L non è iniettiva (e quindi se e solo se L non è un isomorfismo) e in tal caso risulta E(0) = KerL.

Un autovettore di una matrice A di ordine n è un autovettore dell'endomorfimo L di K^n definito da A (ossia L è rappresentato da A rispetto alla base canonica di K^n) dunque un autovettore di A è una n-pla $X \neq \underline{0}$ tale che $AX = \lambda X$, lo scalare λ è un autovalore di A.

TEOREMA. Siano $\lambda_1, \dots \lambda_t$ autovalori di L allora i relativi autospazi hanno somma diretta.

Dimostrare questo teorema usando il seguente:

LEMMA. Autovettori relativi ad autovalori a due a due distinti sono indipendenti**.**

Dim.

Siano $v_1,\dots,v_t$ autovettori di L relativi rispettivamente agli autovalori $\lambda_1,\dots \lambda_t$ con $(\lambda_i-\lambda_j) \neq 0$ se $i \neq j$. Si indichi con h la dimensione dello sottospazio $<v_1,\dots,v_t>$. Non è restrittivo supporre che i primi h vettori siano quelli indipendenti. La tesi è $h = t$. Per assurdo supponiamo $h < t$, allora il vettore v_t è combinazione lineare degli autovettori $v_1,\dots,v_h$, cioè:
$v_t = a_1v_1+\dots+ a_hv_h$, con $(a_1,\dots a_h) \neq \underline{0}$ essendo v_t un autovettore.
Pertanto si ha:
$a_1 \lambda_1 v_1+\dots+ a_h \lambda_h v_h = a_1 L(v_1)+\dots+ a_h L(v_h) = L(a_1v_1+\dots+ a_hv_h) = L(v_t) = \lambda_t v_t = \lambda_t (a_1v_1+\dots+ a_hv_h) = a_1 \lambda_t v_1+\dots+ a_h \lambda_t v_h$
da cui: $a_1(\lambda_1- \lambda_t) v_1+\dots+ a_h (\lambda_h- \lambda_t) v_h = \underline{0}$ con $(a_1,\dots a_h) \neq \underline{0}$ e per ipotesi $(\lambda_i - \lambda_t) \neq 0$ per $i = 1,\dots h$. Si è giunti ad un assurdo essendo i vettori $v_1,\dots v_h$ indipendenti.

$\square$

PROPOSIZIONE 1.3. Risulta: λ autovalore di L $\Leftrightarrow$ $\det (M_B(L) - \lambda I) = 0$.
Dim. Infatti si ha: λ autovalore di L $\Leftrightarrow$ esiste $v \neq \underline{0}$ tale che $L(v) = \lambda v$ $\Leftrightarrow$ esiste $v \neq \underline{0}$ tale che $L(v) - \lambda v = \underline{0}$ $\Leftrightarrow$ esiste $v \neq \underline{0}$ tale che $(L-\lambda\, id) (v) = 0$ $\Leftrightarrow$ esiste $v \neq 0$ tale che $v \in Ker(L- \lambda\, id)$ $\Leftrightarrow$ il sistema $(M_B(L) - \lambda I) X = 0$ ammette soluzioni non nulle $\Leftrightarrow$ $\det (M_B(L) - \lambda I) = 0$.

$\square$

Si ha $\det (M_B(L) - \lambda I) = \det(M_{B'}(L) - \lambda I)$. Infatti se A è una matrice simile ad A' risulta: $\det(A'- \lambda I) = \det(P^{-1}AP- \lambda I) = \det (P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) = \det(P^{-1} (AP - \lambda P)) = \det(P^{-1}) \det(AP - \lambda P) = \det(P^{-1}) \det((A - \lambda I)P) = \det(P^{-1}) \det(A - \lambda I) \det(P) = \det(P^{-1}) \det(P) \det (A- \lambda I) = \det(A - \lambda I)$.
Gli autovalori di un endomorfismo L sono quindi tutti gli zeri del polinomio $\det(M_B(L) - \lambda I)$ di grado n che si dice *polinomio caratteristico* di L. La molteplicità $m_a(\lambda)$ di λ come radice del polinomio caratteristico si dice *molteplicità algebrica di* λ e si ha:

$$m_g(\lambda)\leq m_a(\lambda) \leq n$$

Pertanto un endomorfismo ha al più n autovalori contati con la loro molteplicità.

2. DIAGONALIZZAZIONE di ENDOMORFISMI e MATRICI

PROBLEMA 1. Dato un endomorfismo L di V esiste una matrice D diagonale che rappresenta L? Ossia L è diagonalizzabile? Come è possibile eventualmente determinare D e la base B tale che $M_B(L) = D$?
PROBLEMA 2. Data una matrice A esiste una matrice D diagonale simile ad A ? Ossia A è diagonalizzabile? Come si determina D e la matrice P tale che $P^{-1}D P = A$?
Si osservi che il problema 2 è un caso particolare del problema 1, in quanto diagonalizzare la matrice A significa diagonalizzare l'endomorfismo L di $\mathbf{K}^n$ rappresentato da A rispetto alla base canonica.

Le seguenti proposizioni sono equivalenti:
a) L'endomorfismo L di V ($\dim V = n$) è diagonalizzabile.
b) Esiste una base di V costituita da autovettori di L.

c) Lo spazio V è somma diretta degli autospazi di L.
d) Ogni autovalore di L ha molteplicità geometrica uguale alla molteplicità algebrica. La somma di tutte molteplicità geometriche è uguale alla dimensione di V.

Dim. a)$\Rightarrow$b). Infatti se L è diagonalizzabile esiste una matrice D diagonale che rappresenta L rispetto ad una base $B = \{v_1,\dots,v_n\}$ di V. Se $v_j \in B$ le coordinate di $L(v_j)$ sono date dalla j-esima colonna di D che nei posti (i,j) con $i \neq j$ ha 0. Quindi $L(v_j) = d_{jj} v_j$, cioè v_j è un autovettore di L per ogni j =1,..n.
Dim. b)$\Rightarrow$a). Se $B = \{v_1,\dots,v_n\}$ è una base di autovettori di L, la matrice $M_B(L)$ è diagonale e sulla diagonale si trovano tutti gli autovalori di L.
Completare la dimostrazione.

□

Quindi per diagonalizzare un endomorfismo L di V su K si procede come segue:
1. Si determina il polinomio caratteristico det $(L-\lambda I)$ di L e si calcolano le sue radici $\lambda_1,\dots\lambda_t$ con le relative molteplicità $m_a(\lambda_i)$. Se il polinomio caratteristico non è riducibile in K in n fattori lineari contati con la loro molteplicità, allora L non è diagonalizzabile. Altrimenti:
2. Per ciascun autovalore λ_i si determina la dimensione $m_g(\lambda_i)$ del relativo autospazio $E(\lambda_i)$. Se $m_g(\lambda_i) \neq m_a(\lambda_i)$ per qualche autovalore λ_i allora L non è diagonalizzabile. Se invece $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$ per ogni i = 1,..t, allora:
3. Si determina una base B_i per ogni autospazio $E(\lambda_i)$. L'insieme $B = B_1 \cup \dots \cup B_t$ è una base di V costituita da autovettori di L e $M_B(L) = D$ è la matrice diagonale che rappresenta L. Si osservi che se l'endomorfismo L è definito assegnando una base C e la matrice $M_C(L)$ si ha : $M_C(L) = M^B{}_C(id)\, M_B(L)\, M^C{}_B(id)$, cioè le matrici $M_C(L)$ e $M_B(L)$ sono simili e la matrice $P^{-1} = M^B{}_C(id)$ ha per colonne le coordinate degli autovettori di L rispetto a C.

Per diagonalizzare una matrice quadrata M si procede seguendo i punti 1,2 e 3 e tenendo conto che in questo caso C è la base canonica di K^n ed L è l'endomorfismo di $\mathbf{K}^\mathbf{n}$ associato ad M rispetto alla base canonica C.

ESEMPIO 1. Siano V **=** $\mathbf{R}_2[x]$ e L l'endomorfismo di V definito da:

$$L(a+bx+cx^2) = 3a+3bx-(2a+3b)x^2$$

Determinare

a) una matrice diagonale D che rappresenti L.
b) la matrice P^{-1} tale che, indicata con A la matrice che rappresenta L rispetto alla base canonica B, risulti $A = P^{-1}D\, P$.
c) la matrice A' che rappresenta L rispetto alla base B' $=\{1,\ 1-x\ ,\ 1-x^2\}$ e la matrice Q tale che $A' = Q^{-1}D\, Q$

Sol.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(M) = 2 = \dim \mathrm{Im}L$, dunque L non è un isomorfismo e 0 è un suo autovalore.
Il polinomio caratteristico di L è $\det(A-\lambda I) = -\lambda(3-\lambda)^2$. Quindi gli autovalori di L sono 0 e 3 con $m_a(0) = 1$ e $m_a(3) = 2$.
$E(0) = \mathrm{Ker}\, L = \{v \in V: L(v) = 0\}$. Se $v \in E(0)$ le sue coordinate rispetto alla base canonica sono le soluzioni di $AX = 0$ e quindi $E(0) = \{ a+bx+cx^2 : a=0, b=0\}$, $B_1=\{x^2\}$ è una sua base e $m_g(0) = m_a(0) = 1$.
$E(3) = \{ a+bx+cx^2 : -2a+3b-3c= 0\}$, l'insieme $B_2 = \{ 3/2 + x, -3/2 + x^2 \}$è una base di E(3) e $m_g(3) = m_a(3) = 2$. L'insieme $B° = B_1 \cup B_2 = \{x^2, 3/2+x, -3/2+x^2\}$ è una base di V costituita da autovettori di L e si ha:

$$M_B(L) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D \ \text{ e } \ P^{-1} = M^{B°}{}_B(id) = \begin{pmatrix} 0 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le colonne di Q^{-1} sono le coordinate dei vettori della base B° rispetto alla base B', ossia:

$$x^2 = 1- (1-x^2);\ \ 3/2 + x = 5/2 - (1-x);\ \ -3/2 +x^2= -1/2 -(1-x^2)$$

Pertanto:

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 & -1/2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

e $A' = M_{B'}(L) = Q^{-1} D\, Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

ESEMPIO 2. Data la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Determinare gli autovalori di A e una base per ogni autospazio.
Verificare infine se esiste una matrice diagonale D simile ad A ed eventualmente trovare una matrice P tale che $A = P^{-1}DP$.
Sol.
Gli autovalori di A sono gli zeri del polinomio caratteristico

$$\det(A-\lambda I) = (\lambda+2)^2(4-\lambda)$$

e dunque gli autovalori di A sono -2 e 4, con $m_a(-2) = 2$ e $m_a(4) = 1$.
L'autospazio E(-2) è costituito dalle soluzioni del sistema $(A+2I)X = 0$, quindi:

$E(-2) = \{(x,y,z) : x = y-z)\}$ e una base di $E(-2)$ è $\{(1,1,0); (1,0,-1)\}$, pertanto $m_a(-2) = m_g(-2) = 2$.
L'autospazio $E(4)$ è costituito dalle soluzioni del sistema $(A-4I)X = 0$, quindi
$E(4) = \{(x,y,z) : x = y, z =2y)\}$ e una base di $E(4)$ è $\{(1,1,2)\}$, pertanto $m_a(4) = m_g(4) = 1$. La matrice data è dunque diagonalizzabile (per ogni autovalorela molteblicità geometrica è uguale a quella algebrica e la somma delle molteplicità è 3). Si ha :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad P = \frac{1}{\det(P^{-1})}\,\mathrm{agg}(P^{-1}) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t \text{ e}$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 1. Siano $V = \mathbf{R}_2[x]$ e L l'endomorfismo di V definito da:

$$L(a+bx+cx^2) = 3a+b+c+(2a+4b+2c)x +(3a+3b+5c)x^2$$

Determinare

a) il valore $L(1,1,-1)$ che l'applicazione assume in $(1,1,-1)$,
b) gli autovalori di L e una base per ogni autospazio.

Verificare infine se L può essere rappresentata da una matrice diagonale D ed eventualmente trovare una matrice P tale che $A = P^{-1}DP$.

ESERCIZIO 2. Dimostrare che la matrice A e la sua trasposta hanno gli stesssi autovalori ma non necessariamente gli stessi autovettori.

ESERCIZIO 3. Sia $V = M_2(\mathbf{R})$ e sia L l'endomorfismo rappresentato rispetto alla base canonica dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinare:

a) il valore $L(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix})$ che l'applicazione assume in $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,
b) una base del nucleo e una dell'immagine di L,
c) l'insieme $L^{-1}(\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix})$
d) gli autovalori di L e una base per ogni autospazio.

Verificare infine se L può essere rappresentata da una matrice diagonale D ed eventualmente trovare una matrice P tale che $A = P^{-1}DP$.