

# CORSO DI ALGEBRA (M-Z)

Prof. A. Venezia

2015-16

## Complementi ed Esercizi

### APPLICAZIONI LINEARI E MATRICI

Siano  $V$  e  $V'$  spazi vettoriali su  $\mathbf{K}$  e siano  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  una base di  $V$  ( $\dim V = n$ ) e  $B' = \{e'_1, \dots, e'_m\}$  una base di  $V'$  ( $\dim V' = m$ ). La matrice  $M_{B'}^B(L) = A$  associata ad una applicazione lineare  $L : V \rightarrow V'$  rispetto alle basi  $B$  e  $B'$  è la matrice  $m \times n$  le cui colonne sono rispettivamente le coordinate rispetto alla base  $B'$  di  $L(e_1), \dots, L(e_n)$ .

Usando la notazione matriciale, se  $X$  è la colonna delle coordinate rispetto a  $B$  di un vettore  $v$  di  $V$  si ha:

$$v = (e_1 \dots e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = BX.$$

Se  $A^1, \dots, A^n$  sono rispettivamente le colonne delle coordinate rispetto a  $B'$  di  $L(e_1), \dots, L(e_n)$ , si ha:

$$L(e_1) = B'A^1, \dots, L(e_n) = B'A^n$$

e dunque

$$L(v) = x_1 L(e_1) + \dots + x_n L(e_n) = x_1 B'A^1 + \dots + x_n B'A^n = B'(x_1 A^1 + \dots + x_n A^n) = B'AX$$

Pertanto se  $X'$  è la colonna delle coordinate di  $L(v)$  rispetto a  $B'$ , ossia  $L(v) = B'X'$ , allora si ha  $X' = AX$ .

In particolare ogni matrice  $A \in M_{mn}(\mathbf{R})$  determina una applicazione lineare  $L(A) : \mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{K}^m$  definita da  $L(A)X = AX$ . L'immagine di  $L(A)$  è lo spazio vettoriale generato dalle colonne di  $A$ , mentre il nucleo è costituito dalle soluzioni del sistema omogeneo  $AX = 0$ .

**ESERCIZIO 1.** Sia  $L : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$ , l'applicazione lineare definita da:

$$L(a,b,c) = (c, b+a, c, c).$$

Determinare la matrice associata ad  $L$  rispetto alle seguenti coppie di basi:

- ✓  $B = \{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)\}$   $B' = \{(1,0,0,0); (0,1,0,0); (0,0,1,0); (0,0,0,1)\}$  (basi canoniche)
- ✓  $B = \{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)\}$   $B' = \{(1,1,0,0); (1,0,1,0); (0,0,1,1); (0,0,0,1)\}$
- ✓  $B = \{(1,1,0); (0,1,1); (0,0,-1)\}$   $B' = \{(1,0,0,0); (0,1,0,0); (0,0,1,0); (0,0,0,1)\}$
- ✓  $B = \{(0,1,0); (0,0,1); (1,0,0)\}$   $B' = \{(1,0,0,0); (0,1,0,0); (0,0,1,0); (0,0,0,1)\}$
- ✓  $B = \{(1,1,0); (0,1,1); (0,0,-1)\}$   $B' = \{(1,1,0,0); (1,0,1,0); (0,0,1,1); (0,0,0,1)\}$ .

L'applicazione  $L$  è iniettiva? È suriettiva?

**ESERCIZIO 2.** Sia  $L: \mathbf{R}^2 \rightarrow M_2(\mathbf{R})$  l'applicazione lineare definita da:

$$L(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; L(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinare la matrice associata ad  $L$  rispetto alle seguenti coppie di basi:

$$\checkmark B = \{(1,0);(0,1)\}; B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\checkmark B = \{(1,1);(2,1)\}; B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\checkmark B = \{(1,1);(2,1)\}; B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

**ESERCIZIO 3.** Sia  $L: \mathbf{R}_2[x] \rightarrow M_2(\mathbf{R})$  l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alle basi:

$$B = \{1+x; x+x^2; -x^2\} \text{ e } B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esprimere  $L(a+bx+cx^2)$  come combinazione lineare dei vettori della base canonica. L'applicazione  $L$  è iniettiva? E' suriettiva?

**ESERCIZIO 4.** Determinare il nucleo e l'immagine delle seguenti applicazioni lineari:

$$a) L: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4, L(x,y,z) = (x+y, x+y, z+x, z+x)$$

$$b) L: M_2(\mathbf{R}) \rightarrow M_2(\mathbf{R}), L \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x+z+y \\ 2x & x-y \end{pmatrix}$$

$$c) L: M_2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}_3[x], L \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (d + (a+2b+c)x + dx^2 + (a+c+2d)x^3)$$

**PROPOSIZIONE 1.** ( isomorfismo tra lo spazio delle applicazioni lineari e la matrici). Siano  $V$  e  $V'$  spazi vettoriali su  $\mathbf{K}$  e siano  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  una base di  $V$  ( $\dim V = n$ ) e  $B' = \{e'_1, \dots, e'_m\}$  una base di  $V'$  ( $\dim V' = m$ ). Sia  $\varphi: \text{Hom}(V, V') \rightarrow M_{m,n}(\mathbf{R})$  applicazione lineare definita per ogni applicazione lineare  $L: V \rightarrow V'$  da:  $\varphi(L)$  è la matrice associata ad  $L$  rispetto alle basi  $B$  e  $B'$ . allora  $\varphi$  è un isomorfismo. Pertanto la dimensione dello spazio vettoriale  $\text{Hom}(V, V')$  è  $mn$ .

*Dim.*

Per le proprietà delle operazioni tra matrici si ha:

$$\varphi(L_1 + L_2) = \varphi(L_1) + \varphi(L_2), \varphi(kL) = k \varphi(L).$$

L'applicazione lineare  $\varphi$  è iniettiva in quanto  $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ , infatti l'unica applicazione lineare che ha per matrice associata la matrice nulla è l'applicazione di costante

valore 0. Inoltre  $\varphi$  è suriettiva in quanto data una matrice  $A$ , l'applicazione lineare  $L$  che al vettore  $v = BX$  di coordinate  $X$  associa  $L(v) = B'AX$  è tale che  $\varphi(L) = A$ . □

**PROPOSIZIONE 2.** Siano  $V, V', V''$  spazi vettoriali sul campo  $K$  e  $B, B', B''$  le rispettive basi. Siano  $L_1: V \rightarrow V'$  e  $L_2: V' \rightarrow V''$  applicazioni lineari. Allora:

$$M_{B''}^B(L_2 \circ L_1) = M_{B''}^{B'}(L_2) \circ M_{B'}^B(L_1)$$

*Dim.*

Posto  $A_1 = M_{B'}^B(L_1)$  e  $A_2 = M_{B''}^{B'}(L_2)$ , allora se  $v = BX$ ,  $L_1(v) = B'A_1X$  e se  $v' = B'X'$  si ha  $L_2(v') = B''A_2X'$ . Si ha:

$$1. (L_2 \circ L_1)(v) = B'' M_{B''}^B(L_2 \circ L_1)X.$$

$$2. (L_2 \circ L_1)(v) = L_2(L_1(v)) = B''A_2(A_1X) = B''(A_2A_1)X.$$

Confrontando 1 e 2 ed essendo univocamente determinata la  $n$ -pla delle coordinate, si ha  $M_{B''}^B(L_2 \circ L_1) = A_2A_1$ . □

Dunque la matrice associata ad un isomorfismo  $L: V \rightarrow V'$  è invertibile e la sua inversa è la matrice associata ad  $L^{-1}: V' \rightarrow V$ , inversa di  $L$ .

**ESERCIZIO 5.** Determinare le inverse delle matrici  $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ .

**ESERCIZIO 6.** Determinare una applicazione lineare  $L: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$  la cui immagine  $\text{Im } L$  sia generata dai vettori:  $(1, 2, 0, -4)$  e  $(2, 0, -1, -3)$ .

**ESERCIZIO 7.** Determinare una base dello spazio vettoriale  $\text{Hom}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3)$ .

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $K$  e siano  $B$  e  $B'$  due basi di  $V$ . Allora per ogni vettore  $v$  di  $V$  si ha  $v = BX = B'X'$  dove  $X$  è la colonna delle coordinate di  $v$  rispetto a  $B$  e  $X'$  è la colonna delle coordinate di  $v$  rispetto a  $B'$ . Si ha :

$$(2.5.1) \quad X' = AX$$

dove  $A$  è la matrice associata all'identità rispetto alle basi  $B$  e  $B'$ ; tale matrice si dice *matrice di transizione dalla base  $B$  alla base  $B'$*  (o matrice del cambiamento di base) e la (2.5.1.) esprime le coordinate di un vettore rispetto alla base  $B'$  in funzione delle sue coordinate rispetto alla base  $B$ .

**ESERCIZIO 8.** Siano  $B = \{(1, 0); (0, 1)\}$  e  $B' = \{(1, 3); (2, 5)\}$  basi di  $\mathbf{R}^2$ .

- i) Trovare la matrice di transizione dalla base  $B$  alla base  $B'$ .
- ii) Trovare la matrice di transizione dalla base  $B'$  alla base  $B$ .
- iii) Verificare che le due matrici sono una l'inversa dell'altra.
- iv) Determinare la coordinate del vettore  $(-3, 7)$  rispetto alla base  $B'$ .

**ESERCIZIO 9.** Dati i sottoinsiemi di  $\mathbf{R}_2[x]$ :

$$B = \{1+x+x^2, 1+x, 1\} \text{ e } B' = \{1-x, 1, 1-x^2\},$$

dimostrare che sono basi e determinare la matrice del cambiamento di base da B a B' e quella del cambiamento di base da B' a B. Verificare che sono una l'inversa dell'altra. Determinare le coordinate del vettore  $(2+x-2x^2)$  rispetto a B e a B'.

**ESERCIZIO 10.** Siano:

$$B = \{e^t, e^{2t}, te^{2t}\}, B' = \{1, t, \sin 3t, \cos 3t\},$$

dimostrare che sono insiemi indipendenti.

Sia D l'operatore derivata. Trovare la matrice associata a D considerata come endomorfismo dello spazio generato da B ed inoltre la matrice associata a D considerata come endomorfismo dello spazio generato da B'.

**ESERCIZIO 11.** Date le applicazioni lineari

$$L: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}_2[x], F: \mathbf{R}_2[x] \rightarrow \mathbf{R}^4$$

definite da:

$$L(a,b,c) = c + (a-c)x + (a+c)x^2, F(a+bx+cx^2) = (c, a+b+c, a)$$

Determinare la matrice associata alla composta  $F \circ L$  rispetto alle basi canoniche.