

# CORSO DI ALGEBRA (M-Z)

Prof. A. Venezia

2015-16

## Complementi ed Esercizi

### APPLICAZIONI LINEARI

Siano  $V$  e  $V'$  spazi vettoriali sul campo  $\mathbf{K}$ . Una applicazione  $L: V \rightarrow V'$  si dice *lineare* se:

1<sub>AL</sub>.  $L(v+w) = L(v) + L(w)$ , per ogni  $v$  e  $w$  in  $V$ ,

2<sub>AL</sub>.  $L(kv) = kL(v)$ , per ogni scalare  $k$  e ogni vettore  $v$ .

Ossia una applicazione lineare è un morfismo di spazi vettoriali sullo stesso campo.

Tutte le applicazioni lineari hanno le seguenti proprietà:

a)  $L(\underline{0}) = \underline{0}$

b) L'immagine del vettore  $v = a_1v_1 + \dots + a_tv_t$  è  $L(v) = a_1L(v_1) + \dots + a_tL(v_t)$ .

c) Se  $S$  è un insieme dipendente di  $V$  allora  $L(S)$  è un insieme dipendente di  $V'$ , cioè  $L$  muta insiemi dipendenti in insiemi dipendenti.

d) Se  $W$  è un sottospazio di  $V$  allora  $L(W)$  è un sottospazio di  $V'$ , cioè  $L$  muta sottospazi in sottospazi.

e) Se  $W'$  è un sottospazio di  $V'$  allora  $L^{-1}(W')$  è un sottospazio di  $V$ .

*Dim.* di a).

$L$  è un morfismo di gruppi e quindi come nel caso dei gruppi:  $L(\underline{0}) + L(\underline{0}) = L(\underline{0} + \underline{0}) = L(\underline{0})$  da cui  $L(\underline{0}) = \underline{0}$ .

*Dim.* di c).

Dimostriamo che esiste una combinazione lineare di vettori di  $L(S)$  uguale al vettore nullo non banale. Poiché per ipotesi  $S$  è dipendente, esiste una combinazione lineare  $a_1v_1 + \dots + a_tv_t$  di vettori di  $S$  con i coefficienti non tutti nulli uguale al vettore nullo, supponiamo  $a_1 \neq 0$ . Si ha:

$\underline{0} = L(\underline{0}) =$  (per ipotesi)  $L(a_1v_1 + \dots + a_tv_t) =$  (per la b)  $a_1L(v_1) + \dots + a_tL(v_t)$ . Quindi  $a_1L(v_1) + \dots + a_tL(v_t) = \underline{0}$ , essendo  $a_1 \neq 0$ , è la combinazione lineare cercata.

*Dim.* di e).

Siano  $w, v \in L^{-1}(W')$  allora  $L(w), L(v) \in W'$ , poiché  $W'$  è un sottospazio  $L(w) + L(v) = L(w+v) \in W'$  e quindi  $w+v \in L^{-1}(W')$ . Analogamente  $kv \in L^{-1}(W')$ .

Per definire una applicazione lineare  $L$  basta assegnare i valori che essa assume sui vettori di una base di  $V$ , infatti dimostriamo che :

**TEOREMA:** Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  sul campo  $K$  e  $V'$  uno spazio vettoriale su  $K$ . Sia  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base di  $V$  e siano  $w_1, \dots, w_n$   $n$ - vettori di  $V'$ . Esiste una sola applicazione lineare  $L : V \rightarrow V'$  tale che

$$L(v_1) = w_1, \dots, L(v_n) = w_n$$

*Dim.*

L'applicazione  $L : V \rightarrow V'$  definita per ogni vettore  $v$  di  $V$  da:

$$L(v) = x_1 w_1 + \dots + x_n w_n,$$

dove  $x_1, \dots, x_n$  sono le coordinate di  $v$  rispetto a  $B$ , verifica le condizioni richieste. Tale applicazione lineare è unica. Infatti se  $F : V \rightarrow V'$  è una applicazione lineare che associa ai vettori di  $B$  rispettivamente  $w_1, \dots, w_n$  allora per ogni  $v$  di  $V$  risulta:

$$F(v) = F(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = x_1 F(v_1) + \dots + x_n F(v_n) = x_1 w_1 + \dots + x_n w_n = L(v).$$

□

**ESERCIZIO 1.** Sia  $L : \mathbf{R}^2 \rightarrow M_2(\mathbf{R})$  l'applicazione lineare definita da:

$$L(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; L(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinare il valore che l'applicazione assume in un vettore generico  $(x,y)$  e in particolare in  $(-2,3)$ . L'applicazione  $L$  è iniettiva? E' suriettiva?

Ogni applicazione lineare  $L : V \rightarrow V'$  individua due sottospazi :

1. *Il nucleo*  $\text{Ker } L = \{ v \in V : L(v) = \underline{0} \}$ , sottospazio di  $V$ ,
2. *L'immagine*  $\text{Im } L = \{ v' \in V' : \text{esiste } v \in V \text{ tale che } L(v) = v' \}$ , sottospazio di  $V'$ .

Il nucleo è legato alla caratterizzazione delle applicazioni lineari iniettive, mentre l'immagine alla caratterizzazione di quelle suriettive. Infatti risulta:

**PROPOSIZIONE 1.**

$$\begin{aligned} L \text{ iniettiva} &\Leftrightarrow \text{Ker } L = \{\underline{0}\} \\ L \text{ suriettiva} &\Leftrightarrow \dim \text{Im } L = \dim V' \end{aligned}$$

*Dim.*

Sia  $L$  iniettiva e sia  $v \in \text{Ker } L$  allora  $L(v) = \underline{0} = L(\underline{0})$  e quindi, essendo  $L$  iniettiva,  $v = \underline{0}$ . Viceversa sia  $\text{Ker } L = \{\underline{0}\}$ , siano  $v$  e  $w$  vettori di  $V$  tali che  $L(v) = L(w)$ . Si ha:

$$\underline{0} = L(v) - L(w) = L(v-w)$$

Dunque  $(v-w) \in \text{Ker } L = \{\underline{0}\}$  e quindi  $v-w = \underline{0}$ , ossia  $v = w$ .

□

Le applicazioni lineari biettive si dicono *isomorfismi* e due spazi vettoriali si dicono *isomorfi* se è possibile stabilire tra di essi un isomorfismo. La relazione di isomorfismo è una relazione di equivalenza nell'insieme degli spazi vettoriali sullo stesso campo.

Ogni applicazione lineare  $L : V \rightarrow V'$  determina (come ogni funzione) una *relazione di equivalenza*  $\varepsilon$  su  $V$  definita da:

$$v \varepsilon w \text{ se e solo se } L(v) = L(w).$$

**ESERCIZIO 2.** Dimostrare le seguenti proprietà:

1.  $v \sim w$  se e solo se  $v-w \in \text{Ker } L$
2.  $[0] = \text{Ker } L$
3. Per ogni  $v \in V$  :  $[v] = v + \text{Ker } L$
4. Tutte le classi di equivalenza sono in corrispondenza biunivoca.
5. L'insieme quoziente  $V/\varepsilon$  è isomorfo all'immagine di  $L$ .

**TEOREMA** (di omomorfismo per gli spazi vettoriali) Sia  $L:V \rightarrow V'$  un'applicazione lineare. Allora  $V/\text{Ker } L$  è uno spazio vettoriale isomorfo a  $\text{Im } L$ .

*Dim. Esercizio.*

**PROPOSIZIONE 2.** Un'applicazione lineare  $L : V \rightarrow V'$  è iniettiva se e solo l'immagine  $L(S)$  di un insieme indipendente  $S$  è indipendente.

*Dim.*

Sia  $L$  un'applicazione lineare iniettiva e sia  $S$  un insieme indipendente. Sia:

$$a_1 w_1 + \dots + a_t w_t = \underline{0}$$

una combinazione lineare di vettori di  $L(S)$  uguale al vettore nullo. Risulta:

$w_1 = L(s_1), \dots, w_t = L(s_t)$  con  $s_1, s_2, \dots, s_t \in S$ . Pertanto risulta:

$$\underline{0} = a_1 w_1 + \dots + a_t w_t = a_1 L(s_1) + \dots + a_t L(s_t) = L(a_1 s_1 + \dots + a_t s_t),$$

ossia  $(a_1 s_1 + \dots + a_t s_t) \in \text{Ker } L$  e quindi, poiché  $L$  è iniettiva, si ha  $(a_1 s_1 + \dots + a_t s_t) = \underline{0}$ .

Essendo  $S$  indipendente, ogni combinazione lineare di vettori di  $S$  uguale al vettore nullo ha coefficienti tutti nulli e quindi  $a_1 = \dots = a_t = \underline{0}$ .

Viceversa se l'immagine di ogni insieme indipendente è un insieme indipendente, l'immagine  $L(v)$  di un vettore non nullo  $v$  non può essere il vettore nullo e dunque  $\text{Ker } L = \{\underline{0}\}$ . □

**TEOREMA.** Uno spazio vettoriale  $V$  su un campo  $\mathbf{K}$  è isomorfo allo spazio vettoriale  $\mathbf{K}^n$  se e solo se la sua dimensione è  $n$ .

*Dim.*

La condizione è evidentemente necessaria perché se due spazi vettoriali sono isomorfi allora l'immagine tramite l'isomorfismo di una base del dominio è una base del codominio e dunque i due spazi vettoriali hanno la stessa dimensione. Per dimostrare che la condizione è sufficiente, occorre definire un isomorfismo da  $\mathbf{K}^n$  in  $V$ . A tale scopo, si fissi una base  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  di  $V$ , allora l'applicazione

$$T : \mathbf{K}^n \rightarrow V$$

che ad ogni vettore  $(x_1, \dots, x_n)$  associa il vettore  $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ , ossia il vettore la cui  $n$ -pla delle coordinate rispetto a  $B$  è  $(x_1, \dots, x_n)$ .  $T$  è un isomorfismo, infatti  $T$  è iniettiva in quanto essendo  $B$  una base l'unico vettore che corrisponde alla  $n$ -pla nulla è il vettore nullo. Inoltre è suriettiva essendo  $\langle B \rangle = V$ . □

Per il teorema precedente, si possono studiare proprietà di  $V$  usando  $\mathbf{K}^n$ , ad esempio l'indipendenza lineare di un sottoinsieme  $S$  di  $V$ , fissata una base  $B$  di  $V$ , può essere provata dimostrando che  $T(S)$  è indipendente.

**PROPOSIZIONE 3.** Sia  $L:V \rightarrow V'$  un'applicazione lineare. Se  $V$  ha dimensione finita  $n$  sussiste la relazione seguente:

$$\dim V = \dim \text{Ker } L + \dim \text{Im } L$$

*Dim.* Se  $L$  è iniettiva, ossia  $\text{Ker } L = \{\underline{0}\}$ , risulta  $V$  isomorfo a  $\text{Im } L$  e quindi  $\dim V = 0 + \dim \text{Im } L$ . Si supponga dunque  $\text{Ker } L \neq \{\underline{0}\}$  e sia  $B_K = \{u_1, \dots, u_t\}$  una base di  $\text{Ker } L$  e sia  $B = B_K \cup \{v_1, \dots, v_{n-t}\}$  una base di  $V$  contenente  $B_K$  (cfr. teorema del completamento). L'insieme  $\{L(v_1), \dots, L(v_{n-t})\}$  è una base di  $\text{Im } L$ . Se  $L(v) \in \text{Im } L$ , essendo  $v$  combinazione lineare dei vettori della base  $B$ , si ha:

$$L(v) = L(x_1 u_1 + \dots + x_t u_t + y_1 v_1 + \dots + y_{n-t} v_{n-t}) = x_1 L(u_1) + \dots + x_t L(u_t) + y_1 L(v_1) + \dots + y_{n-t} L(v_{n-t}) \\ = (\text{poiché } L(u_i) = \underline{0}) \quad y_1 L(v_1) + \dots + y_{n-t} L(v_{n-t}),$$

quindi  $\langle \{L(v_1), \dots, L(v_{n-t})\} \rangle = \text{Im } L$ . Inoltre se  $\underline{0} = y_1 L(v_1) + \dots + y_{n-t} L(v_{n-t}) = L(y_1 v_1 + \dots + y_{n-t} v_{n-t})$  allora il vettore  $v = y_1 v_1 + \dots + y_{n-t} v_{n-t}$  appartiene a  $\text{Ker } L$  e quindi può esprimersi come combinazione lineare dei vettori di  $B_K$ , ossia  $v = y_1 v_1 + \dots + y_{n-t} v_{n-t} = x_1 u_1 + \dots + x_t u_t$ , da cui:  $x_1 u_1 + \dots + x_t u_t - (y_1 v_1 + \dots + y_{n-t} v_{n-t}) = \underline{0}$  e quindi, poiché  $B$  è indipendente, si ha:  $x_1 = \dots = x_t = y_1 = \dots = y_{n-t} = 0$ , ossia  $\{L(v_1), \dots, L(v_{n-t})\}$  è indipendente.

**ESERCIZIO 3.** Dato lo spazio vettoriale  $\mathbf{R}_2[x]$  dei polinomi di grado  $\leq 2$ , i seguenti insiemi sono dipendenti o indipendenti? Quali costituiscono una base?

$$S_1 = \{x^2+1, x-1, 1, 2x\}; S_2 = \{x^2+x+1, x, 2\}; S_3 = \{x+x^2+1, x-1, 1+3x+2x^2\};$$

$$S_4 = \{x^2+x+1, x, \underline{0}\}; S_5 = \{x^2+1, x-1, -1\}; S_6 = \{x^2+x+1, x^2, 2\}.$$

Data una matrice  $A \in M_{m,n}(\mathbf{K})$ , si dice *trasposta di A* la matrice  $A^t$  che ha per righe le colonne di  $A$ , ( $A = (a_{ij})$ ,  $A^t = (a_{ji})$ ).

**ESERCIZIO 4.** Sia  $T : M_{m,n}(\mathbf{K}) \rightarrow M_{n,m}(\mathbf{K})$  definita da  $T(A) = A^t$ . Dimostrare che  $T$  è un isomorfismo.

**ESERCIZIO 5.** Sia  $L : M_2(\mathbf{K}) \rightarrow M_2(\mathbf{K})$  definita da  $L\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  dimostrare che  $L$  è lineare e determinare  $\text{Im } L$  e  $\text{Ker } L$ .

**ESERCIZIO 6.** Sia  $\text{Tr} : M_n(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{K}$  l'applicazione *traccia* definita da  $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1, \dots, n} a_{ii}$ . Dimostrare che  $\text{Tr}$  è lineare e determinare  $\text{Im } L$  e  $\text{Ker } L$ .

**ESERCIZIO 7.** Si dimostri che i seguenti endomorfismi di  $\mathbf{R}^3$  sono isomorfismi e determinarne l'inversa:

i.  $L(x, y, z) = (x-3y-2z, y-4z, z)$

ii.  $L(x, y, z) = (x+z, x-z, y)$