CORSO DI ALGEBRA (M-Z)

Prof. A. Venezia

2015-16

Complementi ed Esercizi

Novembre 2015

1.INSIEMI DIPENDENTI e INSIEMI INDIPENDENTI

Sia (V,+, .) uno spazio vettoriale sul campo **K.** Un sottoinsieme S di V si dice *dipendente* se esiste un vettore v di S che dipende dai vettori di S -{v} , in altre parole se esiste v di S tale che $v \in \langle (S-\{v\}) \rangle$. In caso contrario S si dice *indipendente*, e quindi S si dice indipendente se per ogni vettore v di S risulta $v \notin \langle (S-\{v\}) \rangle$.

Gli insiemi dipendenti sono caratterizzati come segue :

a) S è dipendente (cioè per definizione esiste $v \in S$ tale che $v \in \langle (S-\{v\}) \rangle$.
b) Esiste una combinazione lineare di vettori di S con coefficienti non tutti nulli uguale al vettore nullo, cioè $\underline{0} = a_1 v_1 + \ldots\ldots + a_n v_n$ dove $v_i \in S$ per ogni i=1,…,n. ed esiste i =1,…n tale che $a_i \neq 0$.
c) Esiste un vettore $v \in S$ tale che $\langle (S-\{v\}) \rangle = \langle S \rangle$

Gli enunciati a), b), c) sono equivalenti.
Dimostrazione di a) $\Rightarrow$ b).
Se S è dipendente esiste un $v \in S$ combinazione lineare di vettori di S -{v} , cioè $v = a_1 v_1 + \ldots\ldots + a_n v_n$ con $v_i \neq v$ per ogni i = 1,…,n. Pertanto la combinazione cercata è : $\underline{0} = a_1 v_1 + \ldots\ldots + a_n v_n - v$.
Dimostrazione di b) $\Rightarrow$ c).
Sia $\underline{0} = a_1 v_1 + \ldots\ldots + a_n v_n$ la combinazione non banale uguale al vettore nullo. Si può sempre supporre $a_1 \neq 0$ e quindi $v_1 = - a_2 v_2/a_1 + \ldots\ldots - a_n v_n/a_1$. Pertanto ogni vettore w di $\langle S \rangle$ si può scrivere come combinazione lineare dei vettori di $\langle S -\{v_1\} \rangle$ perché nella combinazione lineare che esprime un vettore w come elemento di $\langle S \rangle$ si può sostituire v_1 con $(- a_2 v_2/a_1 + \ldots\ldots - a_n v_n/a_1)$.
Infine banalmente si ha c) $\Rightarrow$ a).

ESERCIZIO 1.1. : Dimostrare le seguenti caratterizzazioni degli insiemi indipendenti, ossia dimostrare che a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ a):

a) Il sottoinsieme S è indipendente.
b) L'unica combinazione lineare dei vettori di S uguale al vettore nullo è quella banale.
c) Per ogni vettore v di S si ha che $\langle (S-\{v\}) \rangle$è un sottoinsieme proprio di $\langle S \rangle$.

OSSERVAZIONI:

1. La dipendenza e l'indipendenza lineare è una proprietà dei vettori che dipende dal campo **K** su cui è costruito lo spazio vettoriale. Ad esempio nello spazio vettoriale (**C, +, ·**) sul campo complesso **C,** i vettori 1 e *i* sono dipendenti ($i = 1i$) e quindi l'insieme $\{1,i\}$ è dipendente. Nello spazio vettoriale (**C**,+, ·) sul campo reale **R** lo stesso insieme è indipendente.

2. Se ad un insieme dipendente S si aggiunge un vettore v, l'insieme $S \cup \{v\}$ è sempre dipendente.

3. (*Proprietà fondamentale degli insiemi indipendenti*). Sia S un sottoinsieme indipendente. Se v è un vettore risulta:

$$S \cup \{v\} \text{ è dipendente se e soltanto se } v \in \langle S\rangle$$

che è equivalente ad affermare:

$$S \cup \{v\} \text{ è indipendente se e solo se } v \notin \langle S\rangle$$

ESERCIZIO 1.2. Nello spazio (**R^4, +, ·)** su **R**, siano:

$$v_1 = (1,2,0,3),\ v_2 = (0,1,1,0),\ v_3 = (-1,-2,0,-3),\ v_4 = (0,0,1,-2).$$

a) I sottoinsiemi $\{v_1,v_2\}$, $\{v_1,v_3\}$, $\{v_1,v_4\}$, $\{v_1,v_2,v_4\}$, $\{v_1,v_3,v_4\}$ sono dipendenti o indipendenti?

b) Il vettore (1,-1,-4,5) dipende dai vettori v_1,v_2,v_3,v_4 ?

c) L'insieme $S = \{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ è dipendente ?

d) Trovare, se esiste, un vettore non appartenente allo spazio generato da S.

ESERCIZIO 1.3. Nello spazio vettoriale delle funzioni (**R^R,+,.)** su **R** , dimostrare che l'insieme di funzioni {sen x, cos x, x} è indipendente.

Sol.

Poiché l'insieme F = {sen x, cos x} è indipendente (verificarlo!), basta dimostrare che la funzione x non appartiene allo spazio generato da F. Infatti se fosse:

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x = x \text{ per ogni } x,$$

per $x = 0$ si avrebbe: $a \operatorname{sen} 0 + b \cos 0 = b = 0$ e per $x = \pi/2$: $a \operatorname{sen} \pi/2 + \cos\pi/2 = a = \pi/2$. Ma la funzione $\pi/2 \operatorname{sen} x$ è diversa dalla funzione x, essendo ad esempio $\pi/2 \operatorname{sen} \pi/3 \neq \pi/3$.

ESERCIZIO 1.4. Sia W il sottospazio di **R^3** generato dai vettori $w_1 = (1,1,0)$ e $w_2 = (2,k,1)$.

a) Determinare per quali valori di k l'insieme $\{w_1,w_2\}$ è indipendente,
b) determinare per quali valori di k il vettore v = (-2,1,k) appartiene d W,
c) determinare un sottoinsieme G contenente w_1 e w_2 tale che $\langle G\rangle = \mathbf{R}^3$.
d) determinare un sottospazio U tale che W+U sia diretta,
e) determinare un sottospazio di W non banale.

2.BASI

Una base di uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ *sul campo* K *è un sottoinsieme* B *di* V *tale che*:
1_B B *è linearmente indipendente*.
2_B $<B> = V$.

Le seguenti proposizioni sono equivalenti e caratterizzano le basi:

a) B è una base.
b) B è un insieme di generatori minimale, in altre parole non esiste un insieme di generatori dello spazio contenuto propriamente in B.
c) B è un insieme indipendente massimale, ossia non esiste un insieme indipendente contenente propriamente B.

Dim.
a) $\Rightarrow$ b).
Sia S un insieme contenuto in B propriamente, allora esiste un vettore w tale che $w \in B$ e $w \notin S$. Essendo B indipendente anche $S \cup \{w\}$ è indipendente, dunque w non appartiene allo spazio generato da S e pertanto $<S> \neq V$.
b) $\Rightarrow$ c).
B è indipendente, infatti per ogni $w \in B$ si ha $<B \cup \{w\}> \neq V$, essendo B un sistema di generatori minimale. Rimane da dimostrare che se S è un insieme contenente B allora S è dipendente. Sa w un vettore tale che $w \in S$ e $w \notin B$, allora si ha $V = <B> \subseteq < S - \{w\}> \subseteq <S> = V$ e dunque S è dipendente.
c) $\Rightarrow$ a).
Essendo B indipendente massimale, si ha $<B> = V$. Infatti dato un qualunque vettore $v \notin B$ l'insieme $B \cup \{v\}$ è dipendente e dunque v appartiene allo spazio generato da B.

PROPOSIZIONE. B è una base se e solo se ogni vettore v può essere espresso in un unico modo come combinazione lineare dei vettori di B, cioè se $v = \sum_{w \in B} x_w w = \sum_{w \in B} y_w w$ allora $x_w = y_w$ per ogni $w \in B$. I coefficienti della combinazione si dicono *coordinate di* v rispetto alla base B.

Bisogna tener presente i seguenti fatti.
– *Ogni spazio vettoriale ha una base e tra due basi di uno stesso spazio si può sempre definire una corrispondenza biunivoca.*
– Se una base di uno spazio vettoriale è formata da n vettori allora ogni altra base ha n vettori, in tal caso lo spazio vettoriale si dice di *dimensione finita* n.
– Uno spazio vettoriale si dice di *dimensione infinita* quando le sue basi hanno infiniti elementi.
– La dimensione dipende dal campo su cui è definito la spazio vettoriale. Ad esempio lo spazio vettoriale $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ sul campo complesso **C** ha dimensione 1, mentre sul campo reale **R** ha dimensione 2 essendo $\{1, i\}$ una sua base.

TEOREMA (*del completamento*). Dato un insieme indipendente S di uno spazio vettoriale (V, +, ·) con dim V= n, è possibile determinare un insieme H vettori tale che $S\cup H$ sia una base di V e dunque $|H|=(n-|S|)$.

Dim.

Sia S un insieme indipendente con $|S| = t$ e sia $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base di V. Se il sottospazio $\langle S\rangle$ coincide con V allora S è una base di V e dunque $|S| = n$. Altrimenti esiste un vettore v_1 di B tale che $v_1 \notin \langle S\rangle$, pertanto $S \cup\{v_1\}$ è indipendente. Se $\langle S\cup\{v_1\}\rangle = V$ allora $H = \{v_1\}$ e $|S\cup\{v_1\}| = n$, altrimenti esiste un vettore di B $v_2\notin\langle S\cup\{v_1\}\rangle$ e dunque $S\cup\{v_1,v_2\}$ è indipendente. Iterando questo ragionamento, è possibile determinare un sottoinsieme $H =\{v_1,\ldots v_{n-t}\}$ di B tale che $B_S= S\cup\{v_1,\ldots v_{n-t}\}$ sia indipendente e $\langle S\cup\{v_1,\ldots v_{n-t}\}\rangle = V$, in quanto almeno un vettore di B deve appartenere allo spazio generato da $\langle S\rangle$. L'insieme $S\cup\{v_1,\ldots v_{n-t}\}$ è una base di V contenente S.

TEOREMA (*dell'estrazione*) Dato un sistema G di generatori di uno spazio vettoriale (V, +, ·) con dim V= n, è possibile determinare un sottoinsieme di G che sia una base di V.

ESERCIZIO 2.1. Dimostrare il teorema dell'estrazione.

COROLLARIO 2.1. Sia dim V = n, allora un insieme indipendente con n vettori è una base.

COROLLARIO 2.2. Sia dim V = n, allora n+1 vettori costituiscono un insieme dipendente.

COROLLARIO 2.3. Sia dim V = n, allora un sistema di n generatori è una base.

ESEMPIO. Dato il vettore w =(2,1,2,1) di $\mathbf{R}^4$, determinare una base che contenga w. Determinare inoltre le coordinate del vettore (3,0,3,1) rispetto a questa base.

Sol.

Si consideri la base canonica $B_c = \{(1,0,0,0); (0,1,0,0); (0,0,1,0); (0,0,0,1)\}$ di $\mathbf{R}^4$, per il teorema precedente è possibile aggiungere 3 vettori di B_c all'insieme {w}in modo da ottenere una base di $\mathbf{R}^4$. Il vettore $e_1 =(1,0,0,0)$ non appartiene allo spazio generato da w e dunque $\{w, e_1\}$ è indipendente. Un vettore appartenente a $\langle\{w, e_1\}\rangle$ è del tipo (2a+b,a,2a,a) e dunque il vettore $e_2 = (0,1,0,0)$ non appartiene a $\langle\{w, e_1\}\rangle$ e pertanto l'insieme $\{w, e_1, e_2\}$ è indipendente. Un vettore appartenente a $\langle\{w, e_1, e_2\}\rangle$ è del tipo (2a+b,a+c,2a+d,a) e dunque il vettore $e_3 = (0,0,1,0)$ non appartiene allo spazio $\langle\{w, e_1, e_2\}\rangle$. Pertanto la base richiesta è $B =\{w, e_1, e_2, e_3\}$. Le coordinate del vettore (3,0,3,1) si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2a + b = 3 \\ a + c = 0 \\ 2a + d = 3 \\ a = 1 \end{cases}$$

La quaterna delle coordinate di w rispetto a B è (1,1,-1,1).

PROPOSIZIONE. Dati due sottospazi W e U di uno spazio vettoriale di dimensione n, si ha:
dim W $\le$ n
dim U + dim W = dim (U+W) + dim (U $\cap$W) (*formula di Grassmann*).
Dim.
Se (U$\cap$W) = {0} è ovvio. Sia (U$\cap$W) $\neq$ {0}, fissata una base B={e_1,…e_t} di (U$\cap$W), per il teorema del completamento è possibile determinare un insieme di vettori di U: S_U ={u_{t+1},…u_{t+r}} e un insieme di vettori di W: S_W ={w_{t+1},…w_{t+s}}in modo che B$\cup$ S_U sia una base di U e B $\cup$ S_W sia una base di W . Allora per provare la formula basta dimostrare che l'insieme B_+ = (B$\cup$ S_U $\cup$ S_W) è una base di (U+W). È ovvio che <B_+> = (U+W), inoltre B_+ è indipendente. Infatti sia:

$$a_1e_1+\ldots a_te_t+ a_{t+1}u_{t+1}+\ldots a_{t+r}u_{t+r}+b_1 w_{t+1}+\ldots+b_s w_{t+s}= 0$$

una combinazione lineare di vettori di B_+ uguale al vettore nullo. Allora il vettore

$$v= a_1e_1+\ldots+a_te_t+ a_{t+1}u_{t+1}+\ldots a_{t+r}u_{t+r}= - (b_1 w_{t+1}+\ldots+b_s w_{t+s})$$

appartiene a (U $\cap$W) e dunque può esprimersi come combinazione lineare dei vettori di B, per cui si ha:

$$v = c_1e_1+\ldots+c_te_t = - (b_1 w_{t+1}+\ldots+b_s w_{t+s})$$

da cui: $c_1e_1+\ldots+c_te_t + (b_1 w_{t+1}+\ldots+b_s w_{t+s}) = 0$, ma l'insieme {$e_1$,…$e_t$,$w_{t+1}$,…$w_{t+s}$} è una base di W e dunque per la caratterizzazione c) si ha c_1=…= c_t = b_1 =… = b_s = 0.
Pertanto v è il vettore nullo, ossia $0 = a_1e_1+\ldots+a_te_t+ a_{t+1}u_{t+1}+\ldots a_{t+r}u_{t+r}$ ma essendo l'insieme {e_1,…e_t, u_{t+1},…u_{t+r}} una base di U deve risultare a_1 =…= a_{t+r} = 0. Si è dunque dimostrato che una combinazione lineare di vettori di B_+ uguale al vettore nullo è necessariamente quella con i coefficienti tutti uguali a zero e quindi B_+ è indipendente.

□

ESERCIZIO 2.2. Dati i seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^3$:
U = { (x,y,z) $\in$ $\mathbf{R}^3$: z = 0}, W = { (x,y,z) $\in$ $\mathbf{R}^3$: y = 0}, T = {(x,y,z) $\in$ $\mathbf{R}^3$: x=y=z}
Determinare la dimensione di U+W, U+T, T+W.
Sol.
Risulta : U $\cap$ T = {$\underline{0}$}, W $\cap$ T ={$\underline{0}$}, U $\cap$W = { (x,y,z) $\in$ $\mathbf{R}^3$: y = z= 0}
Una base di U è {(1,0,0), (0,1,0)} , una base di W è {(1,0,0), (0,0,1)} e una di T è {(1,1,1)}
Pertanto:
dim U + dim W = 2 + 2 = dim (U$\cap$W)+ dim (U+W) = 1 + dim (U+W), da cui dim(U+W) = 3 e quindi U +W = $\mathbf{R}^3$.

dim U + dim T = 2 + 1 = dim (U$\cap$T)+ dim (U+T) = 0 + dim(U+T), da cui

$(U + T) = \mathbf{R}^3$.
$\dim W + \dim T = 2 + 1 = \dim (W \cap T) + \dim (W+T) = 0 + \dim(W+T)$ da cui
$(W+T) = \mathbf{R}^3$

ESERCIZIO 2.3. Dato l'insieme S = {(1,2,1,1), (-1,-2,3,2)}, verificare che S è indipendente e determinare una base B di $\mathbf{R}^4$ contenente S.

ESERCIZIO 2.4. Dato l'insieme $S = \{(1+x^2, (2+x-2x^2+2x^3)\}$, verificare che S è indipendente e determinare una base B dello spazio vettoriale $\mathbf{R}_3[x]$ dei polinomi di grado ≤ 3 contenente S.

ESERCIZIO 2.5. Si determini una base e quindi la dimensione dei seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^4$:
$U_1 = \{(a,b,c,d): a-c+d = 0\}$, $U_2 = \{(a,b,c,d): a+d = 0, b = 2c\}$, $U_3 = \{(a,b,c,d) : a+2b=0\}$,
$U_4 = \{(a,b,c,d) : a = 0, b+d = 0, b+c = d\}$, $U_5 = \{(a,b,c,d) : 2a-c+d = 0, c = b\}$.

ESERCIZIO 2.6. Dato lo spazio vettoriale $M_{2,3}(\mathbf{Q})$ delle matrici 2x3 sui razionali, determinare una base B dello spazio generato dalle matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare una base di $M_{2,3}(\mathbf{Q})$ contenete la base B trovata.

ESERCIZIO 2.7. Si consideri lo spazio vettoriale $M_n(\mathbf{K})$ delle matrici quadrate a coefficienti nel campo **K**. Data una matrice $A = (a_{ij})$ si definisce traccia di A l'elemento $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Dimostrare che il sottoinsieme

$$W = \{A \in M_n(\mathbf{K}) : tr(A) = 0\}$$

è un sottospazio e determinarne la dimensione.

ESERCIZIO 2.8. Dimostrare che l'insieme:

$$B = \{-1-x-x^2; 1-x, 1\}$$

è una base dello spazio vettoriale $\mathbf{R}_3[x]$ dei polinomi di grado ≤ 2. Determinare le coordinate rispetto a B dei seguenti vettori: x; $-3+x+2x^2$; $x+x^2$; 2; $1+x^2$, $2x^2$.