

# CORSO DI ALGEBRA (M-Z)

Prof. A. Venezia

2015-16

*Complementi ed Esercizi*

Novembre 2015

## SPAZI VETTORIALI: prime proprietà.

**DEFINIZIONE 1.** Uno spazio vettoriale sul campo  $\mathbf{K}$  è una struttura algebrica  $(V, +, \cdot)$ , dove  $\cdot$  è una operazione esterna  $\cdot : \mathbf{K} \times V \rightarrow V$ , tale che:

1.  $(V, +)$  è un gruppo abeliano.
2. Per ogni  $k \in \mathbf{K}$ ,  $v, w \in V$ :  $k(v+w) = kv+kw$  (distributiva rispetto alla somma vettoriale).
3. Per ogni  $k, h \in \mathbf{K}$ ,  $v \in V$ :  $(k+h)v = kv+hv$  (distributiva rispetto alla somma di scalari).
4. Per ogni  $k, h \in \mathbf{K}$ ,  $v \in V$ :  $(kh)v = k(hv) = h(kv)$ .
5. Per ogni  $v \in V$ :  $1v = v$

Gli elementi del campo si chiamano *scalari*.

In uno spazio vettoriale  $(V, +, \cdot)$  sul campo  $\mathbf{K}$ , il vettore nullo è necessariamente unico e per ogni vettore è anche unico il suo opposto. Inoltre si ha:

1. Per ogni vettore  $v$  :  $0v = \underline{0}$
2. Per ogni scalare  $k$  :  $k\underline{0} = \underline{0}$
3. Per ogni vettore  $v$  e per ogni scalare  $k$  :  $k(-v) = -kv = (-k)v$
4.  $k v = \underline{0} \Leftrightarrow k = 0$  oppure  $v = \underline{0}$ .

*Dim.1.*

Risulta:  $0v = (0+0)v =$  (distributiva)  $0v + 0v$ . Poiché ogni vettore ha un opposto, dalla uguaglianza precedente sommando ad entrambi i termini  $-0v$  si ricava.

$$\underline{0} = 0v - 0v = (0v + 0v) - 0v = 0v + (0v - 0v) = 0v + \underline{0} = 0v$$

*Dim. 3*

$$k(-v) + kv = k(v-v) = k\underline{0} = \underline{0} \text{ dunque } k(-v) \text{ è l'opposto di } kv \text{ e cioè } k(-v) = -kv$$
$$(-k)v + kv = (k-k)v = 0v = \underline{0}, \text{ cioè } (-k)v = -kv$$

□

**ESERCIZIO 1.** Dimostrare che le seguenti strutture algebriche, dove  $+$  e  $\cdot$  indicano rispettivamente le operazioni naturali di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali su  $\mathbf{R}$ :  $(M_{m,n}(\mathbf{R}), +, \cdot)$ ,  $(\mathbf{R}^n, +, \cdot)$ ,  $(\mathbf{R}[x], +, \cdot)$ ,  $(\mathbf{R}^X, +, \cdot)$  con  $X$  insieme non vuoto.

**DEFINIZIONE 2.** Il vettore  $v$  si dice *combinazione lineare dei vettori*  $v_1, \dots, v_n$  se esistono  $n$  scalari  $a_1, \dots, a_n$  tali che  $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ . *CNES affinché un sottoinsieme*  $W$  *non vuoto di uno spazio vettoriale*  $V$  *sia un sottospazio è:*  
*per ogni*  $a, b \in \mathbf{K}$  *e per ogni*  $w, u \in W$  *allora*  $aw + bu \in W$ .

**ESERCIZIO 2.** Quali dei seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale  $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$  sono sottospazi ?

$$A = \{ f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} : f(1/2) = 0 \}$$

$$B = \{ f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} : f(x) \text{ è pari per ogni } x \}$$

$$C = \{ f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} : f(0) = f(1) \}$$

$$D = \{ f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} : f(1) = 0 \}$$

$$E = \{ f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} : f(0) = f(1)^2 \}$$

$$F = \{ f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} : f(2) - 3f(1) = 0 \}$$

*Il sottoinsieme*  $\Sigma(S)$  *costituito da tutte le combinazioni lineari di elementi di*  $S$  *è un sottospazio.*

*L'intersezione di due sottospazi è sempre un sottospazio, l'unione di due sottospazi*  $W$  *e*  $U$  *è un sottospazio se e solo se*  $W \subseteq U$  *oppure*  $U \subseteq W$ .

*Dim.*

Supponiamo che  $W \cup U$  sia un sottospazio. Si deve quindi dimostrare che se  $W$  non è un sottoinsieme di  $U$  allora necessariamente  $U$  deve essere un sottoinsieme di  $W$ . Infatti sia  $u \in U$ . Poiché  $W$  non è contenuto in  $U$ , esiste un vettore  $w$  di  $W$  non appartenente ad  $U$ . Si ha  $u, w \in W \cup U$  e quindi essendo l'unione un sottospazio il vettore  $u + w \in W \cup U$ . Il vettore  $v = u + w$  non può appartenere ad  $U$  (altrimenti  $v - u = w \in U$ ) e quindi appartiene a  $W$ , per cui  $u = v - w \in W$ . Si è dunque dimostrato che ogni vettore  $u$  di  $U$  appartiene anche a  $W$ , cioè  $U \subseteq W$ .

Ovviamente se  $W \subseteq U$ , si ha  $W \cup U = U$  e quindi l'unione è un sottospazio. □

**DEFINIZIONE 3.** *Il sottospazio*  $\langle S \rangle$  *generato dal sottoinsieme*  $S$  *è l'intersezione di tutti i sottospazi contenenti*  $S$ .

*Il sottospazio*  $\langle S \rangle$  *generato dal sottoinsieme*  $S$  *è uguale*  $\Sigma(S)$ .

**ESERCIZIO 3.** Dimostrare che la *somma*  $(U + W)$  *di due sottospazi*  $U$  *e*  $W$  *definita da:*

$$(U + W) = \{ v \in V : v = u + w \text{ con } u \in U \text{ e } w \in W \}$$

*è uguale al sottospazio*  $\langle (U \cup W) \rangle$  *generato da*  $(U \cup W)$ .

*La somma*  $(U + W)$  *si dice diretta, e si indica con*  $(U \oplus W)$ , *se per ogni vettore*  $v$  *di*  $(U + W)$  *esiste un solo vettore*  $u$  *in*  $U$  *e un solo vettore*  $w$  *in*  $W$  *tale che :*

$$v = u + w.$$

In altre parole la somma si dice diretta se, per ogni vettore  $v$  di  $U + W$ , l'identità :

$v = u + w = u' + w'$  con  $u, u' \in U$  e  $w, w' \in W$ . implica  $u = u'$  e  $w = w'$ .

La somma di due sottospazi  $(U + W)$  è diretta se e solo se  $U \cap W = \{ \underline{0} \}$

Dim.

Supponiamo che la somma sia diretta. Sia  $v \in U \cap W$ , se  $v$  non fosse il vettore nullo  $v = v + \underline{0}$  e  $v = \underline{0} + v$  sarebbero due modi di scrivere  $v$  come somma di un vettore di  $U$  e uno di  $W$ . Supponiamo viceversa  $U \cap W = \{ \underline{0} \}$  e sia  $v = u + w = u' + w'$  con  $u, u' \in U$  e  $w, w' \in W$ . Il vettore  $u - u' = w' - w \in U \cap W$  e quindi  $u - u' = w' - w = \underline{0}$ , cioè  $u = u'$  e  $w = w'$ .

□

**ESEMPIO** . Sia  $(M_n(\mathbf{R}), +, \cdot)$  lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine  $n$ .

Data una matrice  $A = (a_{ij})$  si dice *trasposta di A*, e si indica con  $A^t$ , la matrice le cui righe sono le colonne di  $A$ , cioè  $A^t = (a_{ji})$ . Risulta:

$$(A + B)^t = A^t + B^t \text{ e } (kA)^t = kA^t$$

Una matrice  $A = (a_{ij})$  dice *simmetrica* se  $A = A^t$  e si dice *antisimmetrica* se  $A = -A^t$ .

L'insieme  $U$  delle matrici simmetriche e l'insieme  $W$  delle matrici antisimmetriche sono sottospazi di  $M_{nn}(\mathbf{R})$  (dimostrarlo!) e si ha:

$$M_{nn}(\mathbf{R}) = U \oplus W \text{ (dimostrarlo!)}$$

**DEFINIZIONE 4.** Due sottospazi tali che  $U \oplus W = V$  si dicono *supplementari*.

L'insieme  $\mathcal{S}(V)$  dei sottospazi di  $V$  è un reticolo rispetto all'inclusione dove:

$$W \vee U = W + U \text{ e } W \wedge U = W \cap U.$$

**ESERCIZIO 3.**

Dati i sottospazi  $T, U, W$  di uno spazio vettoriale, dimostrare che, se  $T$  è un sottoinsieme di  $W$ , allora:

$$T + (U \cap W) = (T + U) \cap W$$

Dim.

Sia  $v$  un vettore di  $T + (U \cap W)$ , allora  $v = t + v'$  dove  $t \in T$  e  $v' \in U \cap W$ . Quindi si ha:  $v = t + v'$  con  $t \in T \subseteq W$  per ipotesi e  $v' \in W$  e quindi  $v$  è la somma di due vettori di  $W$  e quindi  $v$  è un vettore di  $W$ . Pertanto  $v \in (T+U) \cap W$ . Analogamente si dimostra che

$$(T+U) \cap W \subseteq T + (U \cap W)$$

□

**ESERCIZIO 4.** Dimostrare che il reticolo  $(\mathcal{S}(V), \subseteq)$  non è distributivo.

**ESERCIZIO 5.** Sia  $(V, +, \cdot)$  uno spazio vettoriale sul campo  $\mathbf{K}$  dimostrare che l'insieme dei sottospazi di  $V$  con la relazione di inclusione è un reticolo.

**ESERCIZIO 6.** Per ogni spazio vettoriale elencato nell'esercizio 1, determinare due sottospazi la cui somma è diretta ed è uguale a tutto lo spazio vettoriale.

**ESERCIZIO 7.** Si consideri il sottoinsieme  $S = \{(2,0,0); (0,-3,0)\}$  dello spazio vettoriale  $\mathbf{R}^3$ . Si determini  $\langle S \rangle$  e si dimostri che il vettore  $(5,-2,0)$  ne è un elemento.

**ESERCIZIO 8.** Per ciascuno dei sottoinsiemi seguenti si stabilisca se è un sottospazio di  $(\mathbf{Z}_7)^4$ :

$$W_1 = \{ (a,b,c,d) \in (\mathbf{Z}_7)^4 : a+b+c+d = 0 \}$$

$$W_2 = \{ (a,b,c,d) \in (\mathbf{Z}_7)^4 : a+b+c = 0 \}$$

$$W_3 = \{ (a,b,c,d) \in (\mathbf{Z}_7)^4 : a+b = 0 \}$$

$$W_4 = \{ (a,b,c,d) \in (\mathbf{Z}_7)^4 : a = 0 \}$$

$$W_5 = \{ (a,b,c,d) \in (\mathbf{Z}_7)^4 : a = d \}$$

$$W_6 = \{ (a,b,c,d) \in (\mathbf{Z}_7)^4 : a = d + 1 \}$$

**ESERCIZIO 9.** Dati i sottoinsiemi :

$$W = \{ (a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4 : b = 0 \} \text{ e } U = \{ (a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4 : a + d = 0 \}$$

Dimostrare che sono sottospazi di  $\mathbf{R}^4$  e determinare  $W \vee U$  e  $W \wedge U$ .

**ESERCIZIO 10.** Determinare uno spazio supplementare del sottospazio  $W$  quando:

$$W = \{ (a,b,c) \in \mathbf{R}^3 : a+b+c = 0 \}$$

$$W = \{ (a,b,c) \in \mathbf{R}^3 : a+b = 0, a-d=0 \}$$

$$W = \{ p(x) \in \mathbf{R}[x] : \text{grado di } p(x) \leq 3 \}$$

$$W = \{ a+bx+cx^2+dx^3 \in \mathbf{R}_3[x] : a+b=0, c+d=0 \}$$

$$W = \{ p(x) \in \mathbf{R}[x] : p(x) = p(-x) \}.$$

**ESERCIZIO 11.** Sia  $X$  un insieme e  $P(X)$  l'insieme delle sue parti. La differenza simmetrica di due sottoinsiemi  $A$  e  $B$  di  $X$  è il sottoinsieme:

$$A \Delta B = (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}), \text{ (cfr. Scheda 1)}$$

ossia  $A \Delta B$  contiene gli elementi che stanno in  $A$  o in  $B$ , ma non nella loro intersezione.

Dimostrare che  $P(X)$  è uno spazio vettoriale sul campo  $\mathbf{Z}_2$  rispetto alla operazione  $\Delta$  e alla operazione di prodotto per uno scalare definita da:

$$0A = \emptyset, \quad 1A = A$$

Quali sono i sottospazi di questo spazio vettoriale?

