

CORSO di ALGEBRA (A-L)

2014-15

PROVA INTERMEDIA

19-11-2014

Svolgere gli esercizi esplicitando il percorso logico seguito per giungere alla soluzione. Non è permesso consultare appunti e testi.

ESERCIZIO 1. Determinare il numero degli “anagrammi” (anche privi di senso) della parola SOTTOSOPRA. Determinare quanti fra questi contengono almeno una delle sequenze: STO, OSO, TOP.

ESERCIZIO 2. Determinare:

- in \mathbf{Z}_{275} le soluzioni dell'equazione $15x = 50$,
- le soluzioni della rispettiva equazione in \mathbf{Z} : $15x \equiv 50 \pmod{275}$,
- il gruppo degli elementi invertibili di \mathbf{Z}_{275} e la sua cardinalità.

ESERCIZIO 3. Discutere la compatibilità ed eventualmente trovare le soluzioni della seguente equazione diofantea:

$$124 = 136x + 24y.$$

ESERCIZIO 4. Scrivere la tabella di addizione e moltiplicazione per $(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3, +, \bullet)$ dove $+$ e \bullet sono le operazioni naturali definite da:

$$([a]_2, [b]_3) + ([c]_2, [d]_3) = ([a]_2 + [c]_2, [b]_3 + [d]_3)$$

$$([a]_2, [b]_3) \bullet ([c]_2, [d]_3) = ([a]_2 [c]_2, [b]_3 [d]_3)$$

Che tipo di struttura è $(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3, +, \bullet)$? Quali sono gli elementi invertibili?

Sia $f: \mathbf{Z}_6 \rightarrow \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3$ l'applicazione definita da $f([x]_6) = ([x]_2, [x]_3)$ verificare che f è biettiva. L'anello \mathbf{Z}_6 e $(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3, +, \bullet)$ sono isomorfi?