

ALGEBRA (M-Z)

(2013-14)

SCHEDA 2

Funzioni, numeri naturali e il principio di induzione, cardinalità.

1. Funzioni.

1.1. Sia $f: \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ definita da: $f(a,b) = (a+2b, -b)$ e sia $g: \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ definita da: $g(a,b) = (-a, 3b)$. Verificare se f e g sono funzioni iniettive e se sono suriettive. Definire $(f \circ g)$ e $(g \circ f)$ e verificare se sono iniettive e se sono suriettive.

1.2. Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione, $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$. Dimostrare che: $X \subseteq f^{-1}(f(X))$ e $f f^{-1}(Y) \subseteq Y$

*Si denoti con $id(A): A \rightarrow A$ l'endofunzione identità ($id(A)(a) = a$ per ogni a di A). Siano $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow A$ applicazioni tali che $(g \circ f) = id(A)$, allora g si dice **inversa sinistra** di f e l'applicazione f si dice **inversa destra** di g .*

1.3. Dimostrare che $f: A \rightarrow B$ ($A \neq \emptyset$) ha una inversa sinistra se e solo se è iniettiva.

1.4. Dimostrare che $f: A \rightarrow B$ ($A \neq \emptyset$) ha un' inversa destra se e solo se è suriettiva.

1.5. Sia $f: A \rightarrow B$. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti.

a) f è iniettiva

b) per ogni $X \in P(A)$ si ha: $f^{-1}(f(X)) = X$

c) per ogni X e Y sottoinsiemi di A si ha: $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$

1.6. Verificare se le seguenti funzioni sono iniettive e se sono suriettive:

✓ $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R} : f(x) = \log x$

✓ $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} : f(x) = |x|$

✓ $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+ : f(x) = x^2 + 1$

✓ $f: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} : f(x,y) = x^2 + y^2$

✓ $f: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} : f(x,y) = 3x - 1$

✓ $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R} : f(x) = (x^2, x+1)$

✓ Sia A un insieme e sia $S \subseteq A$, $f: P(A) \rightarrow P(A) : f(X) = X \cup S$

1.7. Esprimere le funzioni precedenti come composizione di una funzione suriettiva e di una iniettiva.

1.8. Sia $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ l'applicazione definita da: $f(x) = 8x$. Determinare: $f^{-1}(16)$, $f^{-1}(25)$, $f(\{2, -5, 10\})$, $Im f$ e $Ker f$. L'applicazione è iniettiva? È suriettiva?

1.9. Siano $a, b \in \mathbf{R}$. Dimostrare che l'applicazione $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f(x) = ax + b$ è biunivoca per ogni $a \neq 0$.

1.10. Data la funzione $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{N}$ definita da : $f(x) = -3x$ se $x < 0$, $f(x) = x+2$ se $x \geq 0$.
Determinare l'immagine di f .

1.11. Siano $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ due applicazioni. Dimostrare che se f e g sono iniettive allora $(g \circ f)$ è iniettiva, se f e g sono suriettive allora $(g \circ f)$ è suriettiva. Trovare due funzioni f e g non entrambe iniettive (suriettive) la cui composta $(g \circ f)$ sia iniettiva (risp. suriettiva).

2. I numeri naturali e il principio di induzione.

L'insieme \mathbf{N} dei numeri naturali è definito dalle seguenti proprietà:

I. Esiste una funzione $\sigma: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ iniettiva.

II. Esiste un elemento 0 tale che $0 \notin \text{Im } \sigma$.

III. (Principio di induzione) Sia U un sottoinsieme di \mathbf{N} tale che:

$0 \in U$, se $n \in U$ anche $\sigma(n) \in U$

allora $U = \mathbf{N}$.

2.1. Dimostrare che $\text{Im } \sigma = \mathbf{N} - \{0\}$.

2.2. Dimostrare che $\sigma^n(0) = n$.

2.3. Dati due interi x e y , dimostrare che $(x-y)$ divide $(x^n - y^n)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

2.4. La successione di Fibonacci definita da: $a_0=0$, $a_1=1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ per ogni $n \geq 2$, è un esempio di successione definita induttivamente. Provare che:

✓ a_n e a_{n+1} non hanno fattori in comune eccetto 1;

✓ Per ogni $n \geq 1$ si ha $a_1^2 + \dots + a_n^2 = a_n a_{n+1}$;

✓ Per ogni $n \geq 1$ si ha $a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1} = a_{2n}$

2.5. Dato l'enunciato: "Tutte le persone hanno gli occhi dello stesso colore", trovare l'errore nella dimostrazione che segue. Sia n il numero di persone. Per $n=1$ l'enunciato è ovviamente vero. Sia $n \geq 2$. Per ipotesi induttiva prese comunque $(n-1)$ persone queste hanno tutte gli occhi dello stesso colore. Sia A un insieme di n persone, ordinato A si indichi con p_1 e p_n rispettivamente la prima e l'ultima persona di A . Per l'ipotesi di induzione le persone dell'insieme $A - \{p_n\}$ hanno tutte gli occhi dello stesso colore, quindi il colore degli occhi di p_1 è uguale al colore degli occhi di p_{n-1} . Ma anche le persone di $A - \{p_1\}$, essendo $(n-1)$, hanno tutte gli occhi dello stesso colore quindi anche p_n ha il colore degli occhi uguale a quello degli occhi di p_{n-1} colore che è lo stesso di quello degli occhi di tutte le altre persone di A . Dunque supposto l'enunciato vero per $(n-1)$ si è dimostrato che è vero per n e pertanto si è dimostrato per induzione che l'enunciato dato è vero per ogni $n > 0$.

2.6. Dimostrare per induzione su n le seguenti uguaglianze:

a) $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$c) 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$d) 1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

$$e) 1 + 3 + 5 \dots + (2n - 1) = n^2$$

$$f) 1 + 5 + 9 + \dots + (4n + 1) = (n + 1)(2n + 1)$$

$$g) 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$h) 2^3 + 3 + \dots + (2n)^3 = 2n^2(n + 1)^2$$

$$i) \sum_{i=0}^n (4i + 1) = (2n + 1)(n + 1)$$

2.7. Dimostrare che $(\mathbf{N}, +)$, dove l'operazione di somma è definita da: $m+n = \sigma^n(m)$, e $(\mathbf{N} - \{0\}, \cdot)$, dove l'operazione di prodotto è definita da $m \cdot n = (\sigma^m)^n(0)$, sono monoidi commutativi.

2.8. Dimostrare che la relazione \leq definita da:

per ogni $m, n \in \mathbf{N}$, $m \leq n$ se e solo se esiste $x \in \mathbf{N}$ tale che $m + x = n$;

è una relazione d'ordine totale su \mathbf{N} .

2.9. Dimostrare che le operazioni su \mathbf{N} sono isotone, ossia

Se $m \leq n$ e $x \in \mathbf{N}$ allora $(m + x) \leq (n + x)$ e $(mx) \leq (nx)$

\mathbf{N} con la relazione d'ordine naturale è totalmente ordinato e ogni suo sottoinsieme non vuoto ha un primo elemento, ossia \mathbf{N} è ben ordinato.

Dim. Per assurdo, sia V un sottoinsieme non vuoto senza primo elemento.

Sia $P(n)$ il seguente enunciato:

$$P(n) = \text{"Per ogni } v \in V, \text{ risulta } n \leq v\text{"}$$

Risulta $P(0)$ vera. Supposta vera $P(n)$, è vera anche $P(n+1)$. Infatti se per ogni $v \in V$ si ha $n \leq v$, allora n è distinto da v altrimenti n sarebbe il primo elemento di V . Quindi per ogni $v \in V$ esiste x tale che $n+x = v$ con $x \neq 0$, da cui $x = \sigma(y) = y+1$ e dunque $n+1+x = v$, ossia $(n+1) \leq v$.

Pertanto si è dimostrato per induzione che $P(n)$ è vera per ogni naturale n , ma ciò è assurdo poiché se $n \in V$ si avrebbe per ogni $v \in V$ $(n+1) \leq v$ e quindi anche $(n+1) \leq n$.

3. Equipotenza, cardinalità, dimostrazioni biettive.

3.1. Dimostrare il principio della somma: A, B insiemi finiti $A \cap B = \emptyset$, $|A \cup B| = |A| + |B|$.

3.2. Dimostrare il principio del prodotto: A, B insiemi finiti $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

3.3. Siano R, S, A, B insiemi con $A \cap B = \emptyset$. Dimostrare che $|R^{A \cup B}| = |R^A \times R^B|$, $|(R \times S)^A| = |R^A \times S^A|$, $|(R^A)^B| = |R^{A \times B}|$.

3.4. Siano A, R , insiemi finiti. Determinare il numero delle funzioni iniettive da A in R .

3.5. Si indichi con $\binom{n}{k}$ il numero dei sottoinsiemi con k elementi di un insieme con n elementi, tale numero si chiama coefficiente binomiale.

Dimostrare che:

$$\binom{0}{0} = 1, \quad \binom{0}{k} = 0 \text{ con } k \neq \emptyset, \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

3.6. Dimostrare il teorema binomiale: per ogni $x, y \in \mathbf{R}$ si ha:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

3.7. Dimostrare che l'insieme dei sottoinsiemi di un insieme di cardinalità n ha 2^n elementi. Quindi:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

3.8. Dimostrare che $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

3.9. Dimostrare il principio di inclusione esclusione: Sia $t > 1$ e siano A_1, \dots, A_t sottoinsiemi finiti di un insieme R . Allora si ha:

$$|\cup_{i=1, \dots, t} A_i| = \sum_{\emptyset \neq I} (-1)^{|I|-1} |\cap_{i \in I} A_i|$$

dove la somma è estesa a tutti i sottoinsiemi non vuoti I dell'insieme $\{1, \dots, t\}$.

3.10. Quanti sono gli "anagrammi" (anche privi di significato) della parola TRATTARE? Quanti di questi contengono almeno una delle sequenze TRA, ATTA e ARE?

3.11. Dato un insieme finito, dimostrare che i sottoinsiemi di cardinalità pari sono tanti quanti quelli di cardinalità dispari.