

CORSO DI ALGEBRA (M-Z)

Prof. A. Venezia

2013-14

Complementi ed Esercizi

8/12/2013

1. INSIEMI DIPENDENTI e INSIEMI INDIPENDENTI

Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale sul campo \mathbf{K} . Un sottoinsieme S di V si dice *dipendente* se esiste un vettore v di S che dipende dai vettori di $S - \{v\}$, in altre parole se esiste v di S tale che $v \in \langle S - \{v\} \rangle$. In caso contrario S si dice *indipendente*, e quindi S si dice indipendente se per ogni vettore v di S risulta $v \notin \langle S - \{v\} \rangle$.

Gli insiemi dipendenti sono caratterizzati come segue :

- S è dipendente (cioè per definizione esiste $v \in S$ tale che $v \in \langle S - \{v\} \rangle$).
- Esiste una combinazione lineare di vettori di S con coefficienti non tutti nulli uguale al vettore nullo, cioè $\underline{0} = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ dove $v_i \in S$ per ogni $i=1, \dots, n$, ed esiste $i=1, \dots, n$ tale che $a_i \neq 0$.
- Esiste un vettore $v \in S$ tale che $\langle S - \{v\} \rangle = \langle S \rangle$

Gli enunciati a), b), c) sono equivalenti.

Dimostrazione di a) \Rightarrow b).

Se S è dipendente esiste un $v \in S$ combinazione lineare di vettori di $S - \{v\}$, cioè $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ con $v_i \neq v$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Pertanto la combinazione cercata è: $\underline{0} = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n - v$.

Dimostrazione di b) \Rightarrow c).

Sia $\underline{0} = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ la combinazione non banale uguale al vettore nullo. Si può sempre supporre $a_1 \neq 0$ e quindi $v_1 = -a_2 v_2 / a_1 + \dots - a_n v_n / a_1$. Pertanto ogni vettore w di $\langle S \rangle$ si può scrivere come combinazione lineare dei vettori di $\langle S - \{v_1\} \rangle$ perché nella combinazione lineare che esprime un vettore w come elemento di $\langle S \rangle$ si può sostituire v_1 con $(-a_2 v_2 / a_1 + \dots - a_n v_n / a_1)$.

Infine banalmente si ha c) \Rightarrow a).

ESERCIZIO 1.1. : Dimostrare le seguenti caratterizzazioni degli insiemi indipendenti, ossia dimostrare che a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow a):

- Il sottoinsieme S è indipendente.
- L'unica combinazione lineare dei vettori di S uguale al vettore nullo è quella banale.
- Per ogni vettore v di S si ha che $\langle S - \{v\} \rangle$ è un sottoinsieme proprio di $\langle S \rangle$.

OSSERVAZIONI:

1. La dipendenza e l'indipendenza lineare è una proprietà dei vettori che dipende dal campo \mathbf{K} su cui è costruito lo spazio vettoriale. Ad esempio nello spazio vettoriale $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ sul campo complesso \mathbf{C} , i vettori 1 e i sono dipendenti ($i = 1i$) e quindi l'insieme $\{1, i\}$ è dipendente. Nello spazio vettoriale $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ sul campo reale \mathbf{R} lo stesso insieme è indipendente.

2. Se ad un insieme dipendente S si aggiunge un vettore v , l'insieme $S \cup \{v\}$ è sempre dipendente.

3. (*Proprietà fondamentale degli insiemi indipendenti*). Sia S un sottoinsieme indipendente. Se v è un vettore risulta:

$$S \cup \{v\} \text{ è dipendente se e soltanto se } v \in \langle S \rangle$$

che è equivalente ad affermare:

$$S \cup \{v\} \text{ è indipendente se e solo se } v \notin \langle S \rangle$$

ESERCIZIO 1.2. Nello spazio $(\mathbf{R}^4, +, \cdot)$ su \mathbf{R} , siano:

$$v_1 = (1, 2, 0, 3), v_2 = (0, 1, 1, 0), v_3 = (-1, -2, 0, -3), v_4 = (0, 0, 1, -2).$$

a) I sottoinsiemi $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_3\}$, $\{v_1, v_4\}$, $\{v_1, v_2, v_4\}$, $\{v_1, v_3, v_4\}$ sono dipendenti o indipendenti?

b) Il vettore $(1, -1, -4, 5)$ dipende dai vettori v_1, v_2, v_3, v_4 ?

c) L'insieme $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è dipendente?

d) Trovare, se esiste, un vettore non appartenente allo spazio generato da S .

ESERCIZIO 1.3. Nello spazio vettoriale delle funzioni $(\mathbf{R}^{\mathbf{R}}, +, \cdot)$ su \mathbf{R} , dimostrare che l'insieme di funzioni $\{\sin x, \cos x, x\}$ è indipendente.

Sol.

Poiché l'insieme $F = \{\sin x, \cos x\}$ è indipendente (verificarlo!), basta dimostrare che la funzione x non appartiene allo spazio generato da F . Infatti se fosse:

$$a \sin x + b \cos x = x \text{ per ogni } x,$$

per $x = 0$ si avrebbe: $a \sin 0 + b \cos 0 = b = 0$ e per $x = \pi/2$: $a \sin \pi/2 + \cos \pi/2 = a = \pi/2$. Ma la funzione $\pi/2 \sin x$ è diversa dalla funzione x , essendo ad esempio $\pi/2 \sin \pi/3 \neq \pi/3$.

ESERCIZIO 1.4. Sia W il sottospazio di \mathbf{R}^3 generato dai vettori $w_1 = (1, 1, 0)$ e $w_2 = (2, k, 1)$.

- Determinare per quali valori di k l'insieme $\{w_1, w_2\}$ è indipendente,
- determinare per quali valori di k il vettore $v = (-2, 1, k)$ appartiene a W ,
- determinare un sottoinsieme G contenente w_1 e w_2 tale che $\langle G \rangle = \mathbf{R}^3$.
- determinare un sottospazio U tale che $W+U$ sia diretta,
- determinare un sottospazio di W non banale.

2. BASI

Una base di uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ sul campo K è un sottoinsieme B di V tale che:

1_B B è linearmente indipendente.

2_B $\langle B \rangle = V$.

Le seguenti proposizioni sono equivalenti (dimostrarlo!) e caratterizzano le basi:

- B è una base.
- B è un insieme di generatori minimale, in altre parole non esiste un insieme di generatori dello spazio contenuto propriamente in B .
- B è un insieme indipendente massimale, ossia non esiste un insieme indipendente contenente propriamente B .
- Ogni vettore v può essere espresso in un unico modo come combinazione lineare dei vettori di B , cioè se $v = \sum_{w \in B} x_w w = \sum_{w \in B} y_w w$ allora $x_w = y_w$ per ogni $w \in B$.

Bisogna tener presente i seguenti fatti.

- Ogni spazio vettoriale ha una base e tra due basi di uno stesso spazio si può sempre definire una corrispondenza biunivoca.
- Se una base di uno spazio vettoriale è formata da n vettori allora ogni altra base ha n vettori, in tal caso lo spazio vettoriale si dice di *dimensione finita* n .
- Uno spazio vettoriale si dice di *dimensione infinita* quando le sue basi hanno infiniti elementi.
- La dimensione dipende dal campo su cui è definito lo spazio vettoriale. Ad esempio lo spazio vettoriale $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ sul campo complesso \mathbf{C} ha dimensione 1, mentre sul campo reale \mathbf{R} ha dimensione 2 essendo $\{1, i\}$ una sua base.

TEOREMA (del completamento). Dato un insieme indipendente S di uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ con $\dim V = n$, è possibile determinare un insieme H di $(n - |S|)$ vettori tale che $S \cup H$ sia una base di V .

Dim.

Sia S un insieme indipendente con $|S| = t < n$ e sia $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base di V . Il sottospazio $\langle S \rangle$ non può coincidere con V in quanto altrimenti S sarebbe una base di V con $|S| \neq n$. Quindi esiste un vettore v_1 di B tale che $v_1 \notin \langle S \rangle$, pertanto $S \cup \{v_1\}$ è indipendente. Se $(t+1) < n$, allora $|S \cup \{v_1\}| \neq n$, e dunque esiste un vettore di B $v_2 \notin \langle S \cup \{v_1\} \rangle$ e dunque $S \cup \{v_1, v_2\}$ è indipendente. Iterando questo ragionamento, è possibile determinare, un sottoinsieme $H = \{v_1, \dots, v_{n-t}\}$ di B tale che $B_S = S \cup \{v_1, \dots, v_{n-t}\}$ sia indipendente e $|S \cup \{v_1, \dots, v_{n-t}\}| = n$. L'insieme $B_S = S \cup \{v_1, \dots, v_{n-t}\}$ è una base di V contenente S in quanto sia T l'insieme dei vettori di B tale $(S \cup T)$ sia indipendente e per ogni $e_i \in (B - H)$ si abbia $(S \cup H \cup \{e_i\})$ dipendente, allora $\langle (S \cup H) \rangle = V$, pertanto $(S \cup H)$ è una base di V , quindi $|(S \cup H)| = n$ e $(S \cup H) = B_S$.

TEOREMA (dell'estrazione) Dato un sistema G di generatori di uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ con $\dim V = n$, è possibile determinare un sottoinsieme B di G che sia una base di V .

ESERCIZIO 2.1. Dimostrare il teorema dell'estrazione.

PROPOSIZIONE. Dati due sottospazi W e U di uno spazio vettoriale di dimensione n , si ha:

$$\dim W \leq n$$

$$\dim U + \dim W = \dim (U+W) + \dim (U \cap W) \text{ (formula di Grassmann).}$$

Dim.

Se $(U \cap W) = \{0\}$ è ovvio. Sia $(U \cap W) \neq \{0\}$, fissata una base $B = \{e_1, \dots, e_t\}$ di $(U \cap W)$, per il teorema del completamento è possibile determinare un insieme di vettori di U : $S_U = \{u_{t+1}, \dots, u_{t+r}\}$ e un insieme di vettori di W : $S_W = \{w_{t+1}, \dots, w_{t+s}\}$ in modo che $B \cup S_U$ sia una base di U e $B \cup S_W$ sia una base di W . Allora per provare la formula basta dimostrare che l'insieme $B_+ = (B \cup S_U \cup S_W)$ è una base di $(U+W)$. È ovvio che $\langle B_+ \rangle = (U+W)$, inoltre B_+ è indipendente. Infatti sia:

$$a_1 e_1 + \dots + a_t e_t + a_{t+1} u_{t+1} + \dots + a_{t+r} u_{t+r} + b_1 w_{t+1} + \dots + b_s w_{t+s} = 0$$

una combinazione lineare di vettori di B_+ uguale al vettore nullo. Allora il vettore

$$v = a_1 e_1 + \dots + a_t e_t + a_{t+1} u_{t+1} + \dots + a_{t+r} u_{t+r} = - (b_1 w_{t+1} + \dots + b_s w_{t+s})$$

appartiene a $(U \cap W)$ e dunque può esprimersi come combinazione lineare dei vettori di B , per cui si ha:

$$v = c_1 e_1 + \dots + c_t e_t = - (b_1 w_{t+1} + \dots + b_s w_{t+s})$$

da cui: $c_1 e_1 + \dots + c_t e_t + (b_1 w_{t+1} + \dots + b_s w_{t+s}) = 0$, ma l'insieme $\{e_1, \dots, e_t, w_{t+1}, \dots, w_{t+s}\}$ è una base di W e dunque per la caratterizzazione c) si ha $c_1 = \dots = c_t = b_1 = \dots = b_s = 0$.

Pertanto v è il vettore nullo, ossia $0 = a_1 e_1 + \dots + a_t e_t + a_{t+1} u_{t+1} + \dots + a_{t+r} u_{t+r}$ ma essendo l'insieme $\{e_1, \dots, e_t, u_{t+1}, \dots, u_{t+r}\}$ una base di U deve risultare $a_1 = \dots = a_{t+r} = 0$. Si è dunque dimostrato che una combinazione lineare di vettori di B_+ uguale al vettore nullo è necessariamente quella con i coefficienti tutti uguali a zero e quindi B_+ è indipendente. □

ESERCIZIO 2.2. Dati i seguenti sottospazi di \mathbf{R}^3 :

$$U = \{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : z = 0 \}, W = \{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : y = 0 \}, T = \{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x=y=z \}$$

Determinare la dimensione di $U+W$, $U+T$, $T+W$.

Sol.

$$\text{Risulta : } U \cap T = \{ \underline{0} \}, W \cap T = \{ \underline{0} \}, U \cap W = \{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : y = z = 0 \}$$

Una base di U è $\{(1,0,0), (0,1,0)\}$, una base di W è $\{(1,0,0), (0,0,1)\}$ e una di T è $\{(1,1,1)\}$

Pertanto:

$$\dim U + \dim W = 2 + 2 = \dim (U \cap W) + \dim (U+W) = 1 + \dim (U+W), \text{ da cui } \dim(U+W) = 3 \text{ e quindi } U+W = \mathbf{R}^3.$$

$$\dim U + \dim T = 2 + 1 = \dim (U \cap T) + \dim (U+T) = 0 + \dim(U+T), \text{ da cui}$$

$$(U + T) = \mathbf{R}^3.$$

$\dim W + \dim T = 2 + 1 = \dim (W \cap T) + \dim (W + T) = 0 + \dim(W + T)$ da cui
 $(W + T) = \mathbf{R}^3$

ESERCIZIO 2.3. Dato l'insieme $S = \{(1,2,1,1), (-1,-2,3,2)\}$, verificare che S è indipendente e determinare una base B di \mathbf{R}^4 contenente S .

Sol.

Il vettore $(-1,-2,3,2)$ non è un multiplo del vettore $(1,2,1,1)$ e quindi S è indipendente. Un vettore dello spazio generato da S è

$$(x,y,z,t) = a(1,2,1,1) + b(-1,-2,3,2) = (a-b, 2a-2b, a+3b, a+2b)$$

pertanto il vettore $v = (0,0,4,0)$ non appartiene al $\langle S \rangle$ (perché?). Quindi per la proprietà fondamentale degli insiemi indipendenti, $S' = S \cup \{v\}$ è indipendente. Un vettore di $\langle S' \rangle$ è

$$(x,y,z,t) = a(1,2,1,1) + b(-1,-2,3,2) + c(0,0,4,0) = (a-b, 2a-2b, a+3b+4c, a+2b)$$

e dunque il vettore $w = (0,1,0,3)$ non appartiene a $\text{Span}(S')$. Una base di \mathbf{R}^4 contenente S è $\{(1,2,1,1), (-1,-2,3,2), v, w\}$.

ESERCIZIO 2.4. Dato l'insieme $S = \{(1+x^2, (2+x-2x^2+2x^3))\}$, verificare che S è indipendente e determinare una base B dello spazio vettoriale $\mathbf{R}_3[x]$ dei polinomi di grado ≤ 3 contenente S .

ESERCIZIO 2.5. Si determini una base e quindi la dimensione dei seguenti sottospazi di \mathbf{R}^4 :

$U_1 = \{(a,b,c,d) : a-c+d = 0\}$, $U_2 = \{(a,b,c,d) : a+d = 0, b = 2c\}$, $U_3 = \{(a,b,c,d) : a+2b=0\}$,
 $U_4 = \{(a,b,c,d) : a = 0, b+d = 0, b+c = d\}$, $U_5 = \{(a,b,c,d) : 2a-c+d = 0, c = b\}$.

ESERCIZIO 2.6. Dato lo spazio vettoriale $M_{2,3}(\mathbf{Q})$ delle matrici 2×3 sui razionali, determinare una base B dello spazio generato dalle matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare una base di $M_{2,3}(\mathbf{Q})$ contenete la base B trovata.

ESERCIZIO 2.7. Si consideri lo spazio vettoriale $M_n(\mathbf{K})$ delle matrici quadrate a coefficienti nel campo \mathbf{K} . Data una matrice $A = (a_{ij})$ si definisce traccia di A l'elemento $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Dimostrare che il sottoinsieme

$$W = \{A \in M_n(\mathbf{K}) : \text{tr}(A) = 0\}$$

è un sottospazio e determinarne la dimensione.

ESERCIZIO 2.8. Dimostrare che l'insieme:

$$B = \{-1-x-x^2; 1-x, 1\}$$

è una base dello spazio vettoriale $\mathbf{R}_3[x]$ dei polinomi di grado ≤ 2 . Determinare le coordinate rispetto a B dei seguenti vettori: $x; -3+x+2x^2; x+x^2; 2; 1+x^2, 2x^2$.