CORSO di ALGEBRA (M-Z)

PROVA SCRITTA
04-04-2013

Svolgere gli esercizi esplicitando il percorso logico seguito per giungere alla soluzione. E' permesso solo consultare appunti delle lezioni e testi non di esercizi.

Parte I

ESERCIZIO 1.1. Determinare il numero degli "anagrammi" (anche privi di senso) della parola PASSEGGIATA. Determinare quanti fra questi contengono almeno una delle sequenze: PAG, AGA, GAP.

ESERCIZIO 1.2. Dati i numeri m = 522 e n = 1785, determinare :

a) il MCD(522,1785) mediante l'algoritmo di Euclide,
b) una identità di Bézout,
c) le soluzioni dell'equazione in $\mathbf{Z}_{1785}$: 522 x =408.

Parte II

ESERCIZIO 2.1. Si consideri lo spazio vettoriale reale $M_2(\mathbf{R})$ delle matrici di ordine 2. Dati i sottospazi:

$$W = <\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}>$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} -h-3k-4t & h+t \\ 4h+3k+7t & h-4k-3t \end{pmatrix} : h,k,t \in \mathbf{R} \right\}.$$

Determinare:

a) una base di W e una base di U,
b) il sottospazio (W∩U) e la sua dimensione.
c) il sottospazio (W+U) e la sua dimensione.

ESERCIZIO 2.2. Sia $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito da:

$$L(x,y,z) = (x, -2x+5y, -2x+5z)$$

Determinare:

a) la matrice A associata ad L rispetto alla base canonica,
b) gli autovalori di L e una base per ogni autospazio.

Verificare infine se L può essere rappresentata da una matrice diagonale D ed eventualmente trovare una matrice P tale che $A = P^{-1}DP$.