CORSO di ALGEBRA (M-Z)

a.a. 2012-13

PROVA SCRITTA

09-09-2013

Svolgere gli esercizi esplicitando il percorso logico seguito per giungere alla soluzione. E' permesso solo consultare appunti delle lezioni e testi non di esercizi.

Parte I

ESERCIZIO 1.1. Determinare il numero degli "anagrammi" (anche privi di senso) della parola INTROTOTTI Determinare quanti fra questi contengono almeno una delle sequenze: INT, OTI, TOT.

ESERCIZIO 1.2. Nel gruppo simmetrico S_6 sono assegnate come prodotto di permutazioni cicliche le due permutazioni:

$$\sigma = (136)\,(34)\,(125) \text{ e } \tau = (243)\,(3456)\,(12).$$

(i) Scrivere le permutazioni σ, τ, $\sigma\tau$, $\tau\sigma$ come prodotti di cicli disgiunti e indicarne di ciascuna il periodo,

(ii) determinare gli elementi del gruppo ciclico $< \tau\sigma >$e indicarne tutti i sottogruppi.

Parte II

ESERCIZIO 2.1. Si consideri lo spazio vettoriale reale $\mathbf{R}^3$. Dato l'insieme:

$$S = \{(1,-1,2);\ (3,1,-2);\ (1,0,-3)\},$$

dimostrare che S è una base di $\mathbf{R}^3$, calcolare le coordinate rispetto a S di un vettore generico (x,y,z) e del vettore v = (13,2,-3).

ESERCIZIO 2.2. Sia $L : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito da:

$$L(x,y,z) = (x-3y+3z,\ 3x-5y+3z,\ 6x-6y+4z)$$

Determinare:

a) la matrice A associata ad L rispetto alla base S dell'esercizio precedente,

b) il nucleo e l'immagine di L,

c) gli autovalori di L e una base per ogni autospazio.

Verificare infine se L può essere rappresentata da una matrice diagonale D ed eventualmente trovare una matrice P tale che $A = P^{-1}DP$.