CORSO DI ALGEBRA (M-Z)

Prof. A. Venezia

2012-13

Complementi ed Esercizi

2/1/2013

1.INSIEMI DIPENDENTI e INSIEMI INDIPENDENTI

Sia (V,+, .) uno spazio vettoriale sul campo **K.** Un sottoinsieme S di V si dice *dipendente* se esiste un vettore v di S che dipende dai vettori di S $-\{v\}$, in altre parole se esiste v tale che $v \in \langle (S-\{v\}) \rangle$ In caso contrario S si dice *indipendente*, cioè S è indipendente se e solo se per ogni vettore v di S risulta $v \notin \langle (S-\{v\}) \rangle$.

Gli insiemi dipendenti sono caratterizzati come segue :

a) S è dipendente (cioè per definizione esiste $v \in S$ tale che $v \in \langle (S-\{v\}) \rangle$
b) Esiste una combinazione lineare di vettori di S con coefficienti non tutti nulli uguale al vettore nullo, cioè $\underline{0} = a_1 v_1 + \ldots\ldots + a_n v_n$ dove $v_i \in S$ per ogni i=1,…,n. ed esiste i =1,…n tale che $a_i \neq 0$.
c) Esiste un vettore $v \in S$ tale che $\langle (S-\{v\}) \rangle = \langle S \rangle$

Gli enunciati a), b), c) sono equivalenti.
Dimostrazione di a) $\Rightarrow$ b).
Se S è dipendente esiste un $v \in S$ combinazione lineare di vettori di S $-\{v\}$, cioè $v = a_1 v_1 + \ldots\ldots + a_n v_n$ con $v_i \neq v$ per ogni i = 1,…,n. Pertanto la combinazione cercata è : $\underline{0} = a_1 v_1 + \ldots\ldots + a_n v_n - v$.
Dimostrazione di b) $\Rightarrow$ c).
Sia $\underline{0} = a_1 v_1 + \ldots\ldots + a_n v_n$ la combinazione non banale uguale al vettore nullo. Si può sempre supporre $a_1 \neq 0$ e quindi $v_1 = - a_2 v_2/a_1 + \ldots\ldots - a_n v_n/a_1$. Pertanto ogni vettore w di $\langle S \rangle$ si può scrivere come combinazione lineare dei vettori di $\langle S - \{v_1\} \rangle$ perché nella combinazione lineare che esprime un vettore w come elemento di $\langle S \rangle$ si può sostituire v_1 con $(- a_2 v_2/a_1 + \ldots\ldots - a_n v_n/a_1)$.
Infine banalmente si ha c) $\Rightarrow$ a).

ESERCIZIO 1.1. : Dimostrare le seguenti caratterizzazioni degli insiemi indipendenti, ossia dimostrare che a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ a):

a) Il sottoinsieme S è indipendente.
b) L'unica combinazione lineare dei vettori di S uguale al vettore nullo è quella banale.
c) Per ogni vettore v di S si ha che $\langle (S-\{v\}) \rangle$ è un sottoinsieme proprio di $\langle S \rangle$.

OSSERVAZIONI:
1. La dipendenza e l'indipendenza lineare è una proprietà dei vettori che dipende dal campo **K** su cui è costruito lo spazio vettoriale. Ad esempio nello spazio vettoriale (**C, +,** $\cdot$) sul campo complesso **C,** i vettori 1 e i sono dipendenti (i =1i) e quindi l'insieme $\{1,i\}$ è dipendente. Nello spazio vettoriale (**C**,+, $\cdot$) sul campo reale **R** lo stesso insieme è indipendente.
2. Se ad un insieme dipendente S si aggiunge un vettore v, l'insieme $S \cup \{v\}$ è sempre dipendente.
3. (*Proprietà fondamentale degli insiemi indipendenti*). Sia S un sottoinsieme indipendente. Se v è un vettore risulta:

$$S \cup\{v\} \text{ è dipendente se e soltanto se } v \in \langle S\rangle$$

che è equivalente ad affermare:

$$S \cup\{v\} \text{ è indipendente se e solo se } v \notin \langle S\rangle$$

ESERCIZIO 1.2. Nello spazio (**R^4, +, $\cdot$)** su **R**, siano:

$$v_1= (1,2,0,3),\ v_2 = (0,1,1,0),\ v_3 = (-1,-2,0,-3),\ v_4 = (0,0,1,-2).$$

a) I sottoinsiemi $\{v_1,v_2\}$, $\{v_1,v_3\}$, $\{v_1,v_4\}$, $\{v_1,v_2,v_4\}$, $\{v_1,v_3,v_4\}$ sono dipendenti o indipendenti?
b) Il vettore (1,-1,-4,5) dipende dai vettori v_1,v_2,v_3,v_4 ?
c) L'insieme $S = \{v_1,v_2,v_3,v_4\}$è dipendente ?
d) Trovare, se esiste, un vettore non appartenente allo spazio generato da S.

ESERCIZIO 1.3. Nello spazio vettoriale delle funzioni (**R^R,+,.)** su **R** , dimostrare che l'insieme di funzioni $\{\text{sen } x, \cos x, x\}$ è indipendente.
Dim.
Poiché l'insieme $F = \{\text{sen } x, \cos x\}$ è indipendente (verificarlo!), basta dimostrare che la funzione x non appartiene allo spazio generato da F. Infatti se fosse:

$$a \text{ sen } x + b \cos x = x \text{ per ogni } x,$$

per $x = 0$ si avrebbe: $a \text{ sen } 0 + b \cos 0 = b = 0$ e per $x =\pi /2$: $a \text{ sen } \pi/2 + \cos\pi/2 = a = \pi/2$. Ma la funzione $\pi /2$ sen x è diversa dalla funzione x, essendo ad esempio $\pi /2 \text{ sen } \pi/3 \neq \pi/3$.

ESERCIZIO 1.4. Sia W il sottospazio di **R^3** generato dai vettori $w_1 = (1,1,0)$ e $w_2 = (2,k,1)$.

a) Determinare per quali valori di k l'insieme $\{w_1,w_2\}$ è indipendente,
b) determinare per quali valori di k il vettore v = (-2,1,k) appartiene d W,
c) determinare un sottoinsieme G contenente w_1 e w_2 tale che $\langle G\rangle = \mathbf{R}^3$.
d) determinare un sottospazio U tale che W+U sia diretta,
e) determinare un sottospazio di W non banale.

2.BASI

Una base di uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ *sul campo* K *è un sottoinsieme* B *di* V *tale che*:
1_B B *è linearmente indipendente*.
2_B $<B> = V$.

Le seguenti proposizioni sono equivalenti (dimostrarlo!) e caratterizzano le basi:

a) B è una base.
b) B è un insieme di generatori minimale, in altre parole non esiste un insieme di generatori dello spazio contenuto propriamente in B.
c) B è un insieme indipendente massimale, ossia non esiste un insieme indipendente contenente propriamente B.
d) Ogni vettore v può essere espresso in un unico modo come combinazione lineare dei vettori di B, cioè se $v = \sum_{w \in B} x_w w = \sum_{w \in B} y_w w$ allora $x_w = y_w$ per ogni $w \in B$.

Bisogna tener presente i seguenti fatti.
- *Ogni spazio vettoriale ha una base e tra due basi di uno stesso spazio si può sempre definire una corrispondenza biunivoca.*
- Se una base di uno spazio vettoriale è formata da n vettori allora ogni altra base ha n vettori, in tal caso lo spazio vettoriale si dice di *dimensione finita* n.
- *In uno spazio vettoriale di dimensione n ogni insieme indipendente con n vettori è una base.*
- Uno spazio vettoriale si dice di *dimensione infinita* quando le sue basi hanno infiniti elementi.
- La dimensione dipende dal campo su cui è definito la spazio vettoriale. Ad esempio lo spazio vettoriale $(\mathbf{C},+,\cdot)$ sul campo complesso $\mathbf{C}$ ha dimensione 1, mentre sul campo reale $\mathbf{R}$ ha dimensione 2 essendo $\{1,i\}$ una sua base.

TEOREMA (*del completamento*). Dato un insieme indipendente S di uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ con $\dim V = n$, è possibile determinare un insieme H di $(n-|S|)$ vettori tale che $S \cup H$ sia una base di V.
Dim.
Sia S un insieme indipendente con $|S| = t < n$. Il sottospazio $<S>$ non può coincidere con V in quanto altrimenti S sarebbe una base di V con $|S| \neq n$. Quindi esiste un vettore $v_1 \notin <S>$ e pertanto $S \cup \{v_1\}$ è indipendente. Poiché $|S \cup \{v_1\}| \neq n$, esiste un vettore $v_2 \notin <S \cup \{v_1\}>$ e dunque $S \cup \{v_1, v_2\}$ è indipendente. Iterando questo ragionamento, è possibile determinare, un insieme $H = \{v_1, \ldots v_{n-t}\}$ tale che $S \cup \{v_1, \ldots v_{n-t}\}$ sia indipendente e $|S \cup \{v_1, \ldots v_{n-t}\}| = n$ e quindi $S \cup \{v_1, \ldots v_{n-t}\}$ è una base di V contenente S.

$\square$

TEOREMA (*dell'estrazione*) Dato un sistema G di generatori di uno spazio vettoriale (V, +, $\cdot$) con dim V= n, è possibile determinare un sottoinsieme B di G che sia una base di V.

ESERCIZIO 2.1. Dimostrare il teorema dell'estrazione.

PROPOSIZIONE. *Dati due sottospazi* W e U *di uno spazio vettoriale di dimensione* n, *si ha*:
dim W $\leq$ n
dim U + dim W = dim (U+W) + dim (U $\cap$W) (*formula di Grassmann*).
Dim.
Se (U$\cap$W) = {0} è ovvio. Sia (U$\cap$W) $\neq$ {0}, fissata una base B={$e_1,\dots e_t$} di (U$\cap$W), per il teorema del completamento è possibile determinare un insieme di vettori di U: S_U ={$u_{t+1},\dots u_{t+r}$} e un insieme di vettori di W: S_W ={$w_{t+1},\dots w_{t+s}$}in modo che B$\cup$ S_U sia una base di U e B $\cup$ S_W sia una base di W . Allora per provare la formula basta dimostrare che l'insieme B_+ = (B$\cup$ $S_U \cup S_W$) è una base di (U+W). È ovvio che <B_+> = (U+W), inoltre B_+ è indipendente. Infatti sia:

$$a_1e_1+\dots a_te_t+ a_{t+1}u_{t+1}+\dots a_{t+r}u_{t+r}+b_1\, w_{t+1}+\dots+b_s\, w_{t+s}= 0$$

una combinazione lineare di vettori di B_+ uguale al vettore nullo. Allora il vettore

$$v= a_1e_1+\dots+a_te_t+ a_{t+1}u_{t+1}+\dots a_{t+r}u_{t+r}= -\,(b_1\, w_{t+1}+\dots+b_s\, w_{t+s})$$

appartiene a (U $\cap$W) e dunque può esprimersi come combinazione lineare dei vettori di B, per cui si ha:

$$v = c_1e_1+\dots+c_te_t = -\,(b_1\, w_{t+1}+\dots+b_s\, w_{t+s})$$

da cui: $c_1e_1+\dots+c_te_t + (b_1\, w_{t+1}+\dots+b_s\, w_{t+s}) = 0$, ma l'insieme {$e_1,\dots e_t,w_{t+1},\dots w_{t+s}$} è una base di W e dunque per la caratterizzazione c) si ha $c_1=\dots= c_t = b_1 =\dots = b_s = 0$.
Pertanto v è il vettore nullo, ossia $0 = a_1e_1+\dots+a_te_t+ a_{t+1}u_{t+1}+\dots a_{t+r}u_{t+r}$ ma essendo l'insieme {$e_1,\dots e_t, u_{t+1},\dots u_{t+r}$} una base di U deve risultare $a_1 =\dots= a_{t+r} = 0$. Si è dunque dimostrato che una combinazione lineare di vettori di B_+ uguale al vettore nullo è necessariamente quella con i coefficienti tutti uguali a zero e quindi B_+ è indipendente.

□

ESERCIZIO 2.2. Dati i seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^3$:
U = { (x,y,z) $\in \mathbf{R}^3$: z = 0}, W = { (x,y,z) $\in \mathbf{R}^3$: y = 0}, T = {(x,y,z) $\in \mathbf{R}^3$: x=y=z}
Determinare la dimensione di U+W, U+T, T+W.
Sol.
Risulta : U $\cap$ T = {$\underline{0}$}, W $\cap$ T ={$\underline{0}$}, U $\cap$W = { (x,y,z) $\in \mathbf{R}^3$: y = z= 0}
Una base di U è {(1,0,0), (0,1,0)} , una base di W è {(1,0,0), (0,0,1)} e una di T è {(1,1,1)}
Pertanto:
dim U + dim W = 2 + 2 = dim (U$\cap$W)+ dim (U+W) = 1 + dim (U+W), da cui dim(U+W) = 3 e quindi U +W = $\mathbf{R}^3$.

dim U + dim T = 2 + 1 = dim (U$\cap$T)+ dim (U+T) = 0 + dim(U+T), da cui

$(U + T) = \mathbf{R}^3$.
dim W + dim T = 2 + 1 = dim $(W \cap T)$+ dim (W+T) = 0 + dim(W+T) da cui
$(W+T) = \mathbf{R}^3$

ESERCIZIO 2.3. Dato l'insieme S = {(1,2,1,1), (-1,-2,3,2)}, verificare che S è indipendente e determinare una base B di $\mathbf{R}^4$ contenente S.
Sol.
Il vettore (-1,-2,3,2) non è un multiplo del vettore (1,2,1,1) e quindi S è indipendente. Un vettore dello spazio generato da S è

$$(x,y,z,t) = a\,(1,2,1,1) + b(-1,-2,3,2) =(a-b,2a-2b,a+3b,a+2b)$$

pertanto il vettore v = (0,0,4,0) non appartiene al $\langle S \rangle$ (perché?). Quindi per la proprietà fondamentale degli insiemi indipendenti, $S' = S \cup \{ v \}$ è indipendente. Un vettore di $\langle S' \rangle$ è

$$(x,y,z,t) = a\,(1,2,1,1) + b(-1,-2,3,2) + c(0,0,4,0)=(a-b,2a-2b,a+3b+4c,a+2b)$$

e dunque il vettore w = (0,1,0,3) non appartiene a Span(S'). Una base di $\mathbf{R}^4$ contenente S è { (1,2,1,1), (-1,-2,3,2),v, w}.

ESERCIZIO 2.4. Dato l'insieme $S = \{(1+x^2,\ (2+x-2x^2+2x^3)\}$, verificare che S è indipendente e determinare una base B dello spazio vettoriale $\mathbf{R}_3[x]$ dei polinomi di grado ≤ 3 contenente S.

ESERCIZIO 2.5. Si determini una base e quindi la dimensione dei seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^4$:
U_1 ={(a,b,c,d): a-c+d = 0}, U_2 = {(a,b,c,d): a+d = 0, b =2c}, U_3 ={(a,b,c,d) :a+2b=0},
U_4={(a,b,c,d) : a = 0, b+d = 0, b+c =d}, U_5 = {(a,b,c,d) : 2a-c+d = 0, c = b}.

ESERCIZIO 2.6. Dato lo spazio vettoriale $M_{2,3}(\mathbf{Q})$ delle matrici 2x3 sui razionali, determinare una base B dello spazio generato dalle matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare una base di $M_{2,3}(\mathbf{Q})$ contenete la base B trovata.

ESERCIZIO 2.7. Si consideri lo spazio vettoriale $M_n(\mathbf{K})$ delle matrici quadrate a coefficienti nel campo **K**. Data una matrice $A = (a_{ij})$ si definisce traccia di A l'elemento $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Dimostrare che il sottoinsieme

$$W = \{A \in M_n(\mathbf{K}) : tr(A) = 0\}$$

è un sottospazio e determinarne la dimensione.

ESERCIZIO 2.8. Dimostrare che l'insieme:

$$B= \{-1-x-x^2;\ 1-x,\ 1\}$$

è una base dello spazio vettoriale $\mathbf{R}_3[x]$ dei polinomi di grado ≤ 2. Determinare le coordinate rispetto a B dei seguenti vettori: x; $-3+x+2x^2$; $x+x^2$; 2; $1+x^2$, $2x^2$.