CORSO DI ALGEBRA (M-Z)

Prof. A. Venezia

2012-13

Complementi ed Esercizi

7/01/2013

1.APPLICAZIONI LINEARI

Siano V e V' spazi vettoriali sul campo K. Una applicazione $L : V \to V'$ si dice *lineare* se:

1_{AL}. $L(v+w) = L(v) + L(w)$, per ogni v e w in V,

2_{AL}. $L(k\,v) = k\,L(v)$, per ogni scalare k e ogni vettore v.

Tutte le applicazioni lineari hanno le seguenti proprietà:

a) $L(\underline{0}) = \underline{0}$
b) L'immagine del vettore $v = a_1v_1 + \ldots + a_tv_t$ è $L(v) = a_1 L(v_1) + \ldots a_tL(v_t)$.
c) Se S è un insieme dipendente di V allora L(S) è un insieme dipendente di V', cioè L muta insiemi dipendenti in insiemi dipendenti.
d) Se W è un sottospazio di V allora L(W) è un sottospazio di V', cioè L muta sottospazi in sottospazi.
e) Se W' è un sottospazio di V' allora $L^{-1}(W')$ è un sottospazio di V.

Dim. di a).

L è un morfismo di gruppi e quindi come nel caso dei gruppi: $L(\underline{0}) + L(\underline{0}) = L(\underline{0}+\underline{0}) = L(\underline{0})$ da cui $L(\underline{0}) = \underline{0}$.

Dim. di c).

Dimostriamo che esiste una combinazione lineare di vettori di L(S) uguale al vettore nullo non banale. Poiché per ipotesi S è dipendente, esiste una combinazione lineare $a_1v_1 + \ldots + a_tv_t$ di vettori di S con i coefficienti non tutti nulli uguale al vettore nullo, supponiamo $a_1 \neq 0$. Si ha:

$\underline{0} = L(\underline{0}) =$ (per ipotesi) $L(a_1v_1 + \ldots + a_tv_t) =$ (per la b) $a_1L(v_1) + \ldots + a_tL(v_t)$. Quindi $a_1L(v_1) + \ldots + a_t L(v_t) = \underline{0}$, essendo $a_1 \neq 0$, è la combinazione lineare cercata.

Dim. di e).

Siano $w, v \in L^{-1}(W')$ allora $L(w), L(v) \in W'$, poiché W' è un sottospazio $L(w)+L(v) = L(w+v) \in W'$ e quindi $w+v \in L^{-1}(W')$. Analogamente $kv \in L^{-1}(W')$.

Per definire una applicazione lineare L basta assegnare i valori che essa assume sui vettori di una base di V, infatti dimostriamo che :

TEOREMA: Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo K e V' uno spazio vettoriale su K. Sia B = $\{v_1,\dots v_n\}$ una base di V e siano $w_1,\dots w_n$ n- vettori di V'. Esiste una sola applicazione lineare L : V → V' tale che

$$L(v_1) = w_1, \dots\dots L(v_n) = w_n$$

Dim.

L'applicazione L : V →V' definita per ogni vettore v di V da:

$$L(v) = x_1w_1+ \dots\dots+ x_nw_n ,$$

dove $x_1,\dots,x_n$ sono le coordinate di v rispetto a B, verifica le condizioni richieste. Tale applicazione lineare è unica. Infatti se F : V → V' è una applicazione lineare che associa ai vettori di B rispettivamente $w_1,..,w_n$ allora per ogni v di V risulta:

$F(v) = F(x_1v_1+ \dots\dots+ x_nv_n) = x_1F(v_1)+ \dots\dots+ x_n F(v_n) = x_1w_1+ \dots\dots+ x_nw_n = L(v)$.

□

ESERCIZIO 1.1. Sia L : $\mathbf{R}^2 \rightarrow M_2(\mathbf{R})$ l'applicazione lineare definita da:

$$L(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; L((0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinare il valore che l'applicazione assume in un vettore generico (x,y) e in particolare in (-2,3). L'applicazione L è iniettiva? E' suriettiva?

Ogni applicazione lineare L : V → V' individua due sottospazi :

1. *Il nucleo* Ker L = $\{ v \in V: L(v) = \underline{0} \}$
2. *L'immagine* Im L = $\{ v' \in V'$: esiste $v \in V$ tale che $L(v) = v' \}$

PROPOSIZIONE 1.1. Se V ha dimensione finita, sussiste la relazione seguente:

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}\, L + \dim \mathrm{Im}\, L$$

Il nucleo è legato alla caratterizzazione delle applicazioni lineari iniettive, mentre l'immagine alla caratterizzazione di quelle suriettive. Infatti risulta:

PROPOSIZIONE 1.2.

$$L \text{ iniettiva} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, L = \{\underline{0}\}$$
$$L \text{ suriettiva} \Leftrightarrow \dim \mathrm{Im}\, L = \dim V'$$

Dim.

Sia L iniettiva e sia $v \in$ Ker L allora $L(v) = \underline{0} = L(\underline{0})$ e quindi, essendo L iniettiva, v = $\underline{0}$. Viceversa sia Ker L = $\{\underline{0}\}$, siano v e w vettori di V tali che L(v) = L(w). Si ha:

$\underline{0} = L(v) – L(w) = L(v-w)$

Dunque $(v-w) \in$ Ker L $=\{\underline{0}\}$ e quindi $v-w = \underline{0}$, ossia v = w.

□

Le applicazioni lineari biiettive si dicono *isomorfismi* e due spazi vettoriali si dicono *isomorfi* se è possibile stabilire tra di essi un isomorfismo.

Ogni applicazione lineare L : V → V' determina (come ogni funzione) una *relazione di equivalenza* ρ su V definita da:

$$v\ \rho\ w \text{ se e solo se } L(v) = L(w).$$

ESERCIZIO 1.2. Dimostrare le seguenti proprietà:

1. $v \rho w$ se e solo se $v - w \in$ Ker L
2. $[\underline{0}]$ = Ker L
3. Per ogni $v \in V$: $[v] = v +$ Ker L
4. Tutte le classi di equivalenza sono in corrispondenza biunivoca.
5. L'insieme quoziente V/ρ è isomorfo all'immagine di L.

PROPOSIZIONE 1.3. Un'applicazione lineare $L : V \to V'$ è iniettiva se e solo l'immagine L(S) di un insieme indipendente S è indipendente.

Dim.

Sia L un'applicazione lineare iniettiva e sia S un insieme indipendente. Sia:

$$a_1w_1+\ldots+a_tw_t = \underline{0}$$

una combinazione lineare di vettori di L(S) uguale al vettore nullo. Risulta: $w_1 = L(s_1),\ldots, w_t = L(s_t)$ con $s_1,s_2,\ldots s_t \in S$. Dunque:

$$\underline{0}= a_1w_1+\ldots+a_tw = a_1 L(s_1)+\ldots+a_t L(s_t) = L(a_1s_1+\ldots+a_ts_t),$$

ossia $(a_1s_1+\ldots+a_ts_t)\in$Ker L e quindi, poiché L è iniettiva, si ha $a_1s_1+\ldots+a_ts_t = \underline{0}$. Pertanto essendo S indipendente, ogni combinazione lineare di vettori di S uguale al vettore nullo ha coefficienti tutti nulli e quindi $a_1 =\ldots= a_t = \underline{0}$. Viceversa se l'immagine di ogni insieme indipendente è un insieme indipendente, l'immagine L(v) di un vettore non nullo v non può essere il vettore nullo e dunque Ker L = $\{\underline{0}\}$.

□

TEOREMA. Uno spazio vettoriale V su un campo K è isomorfo allo spazio vettoriale K^n se e solo se la sua dimensione è n.

Dim.

Per dimostrare che la condizione è necessaria, occorre definire un isomorfismo da V in K^n. A tale scopo, si fissi una base $B = \{v_1,v_2,..,v_n\}$ di V, allora l'applicazione

$$T : V \to K^n$$

che ad ogni vettore $v = x_1v_1+... +x_nv_n$ associa la n-pla $(x_1,..,x_2)$ delle sue coordinate rispetto a B è un isomorfismo. Viceversa se V è isomorfo a K^n allora esiste un isomorfismo

$$F: K^n \to V,$$

dunque se $\{e_1,e_2,..,e_n\}$ è una base di K^n, l'insieme $\{F(e_1),F(e_2),..,F(e_n)\}$ è una base di V con n elementi e quindi V ha dimensione n (cfr.

□

Per il teorema precedente, si possono studiare proprietà di V usando K^n, ad esempio l'indipedenza lineare di un sottoinsieme S di V, fissata una base B di V, può essere provata dimostrando che T(S) è indipendente.

ESERCIZIO 1.3. Dato lo spazio vettoriale $\mathbf{R}_2[x]$ dei polinomi di grado ≤ 2, i seguenti insiemi sono dipendenti o indipendenti? Quali costituiscono una base?

$$S_1= \{x^2+1, x-1, 1, 2x\};\ S_2 = \{x^2+x+1, x, 2\};\ S_3= \{x+x^2+1, x-1, 1+3x+2x^2\};$$
$$S_4 = \{x^2+x+1, x, \underline{0}\};\ S_5 = \{x^2+1,x-1, -1\};\ S_6 = \{x^2+x+1, x^2, 2\}.$$

2. APPLICAZIONI LINEARI E MATRICI

Siano V e V' spazi vettoriali su **K** e siano $B = \{e_1,..,e_n\}$ una base di V (dim V= n) e $B' = \{e_1',..,e_m'\}$ una base di V'(dim V' = m). La matrice $M^B_{B'}(L) = A$ associata ad una applicazione lineare $L : V \to V'$ rispetto alle basi B e B' è la matrice mxn le cui colonne sono rispettivamente le coordinate di $L(e_1),\ldots,L(e_n)$ rispetto alla base B'. Pertanto se X è la colonna delle coordinate di un vettore v rispetto a B, ossia v = BX, e se X' è la colonna delle coordinate di L(v) rispetto a B', ossia L(v) =B'X', allora si ha X'= AX.

ESERCIZIO 2.1. Sia $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$, l'applicazione lineare definita da:

$$L(a,b,c) = (c,b+a,c,c).$$

Determinare la matrice associata ad L rispetto alle seguenti coppie di basi:

- ✓ B={(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)}B'={(1,0,0,0);(0,1,0,0);(0,0,1,0);(0,0,0,1)}(basi cononiche)
- ✓ B={(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)} B'={(1,1,0,0);(1,0,1,0);(0,0,1,1);(0,0,0,1)}
- ✓ B ={(1,1,0);(0,1,1);(0,0,-1)} B'={(1,0,0,0);(0,1,0,0);(0,0,1,0);(0,0,0,1)}
- ✓ B={(0,1,0);(0,0,1);(1,0,0)} B'={(1,0,0,0);(0,1,0,0);(0,0,1,0);(0,0,0,1)}
- ✓ B ={(1,1,0);(0,1,1);(0,0,-1)} B'={(1,1,0,0);(1,0,1,0);(0,0,1,1);(0,0,0,1)}.

L'applicazione L è iniettiva? E' suriettiva?

ESERCIZIO 2.2. Sia L: $\mathbf{R}^2 \to M_2(\mathbf{R})$ l'applicazione lineare definita nell'esercizio 1.1. Determinare la matrice associata ad L rispetto alle seguenti coppie di basi:

- ✓ B ={(1,0);(0,1)}; B' = $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$
- ✓ B ={(1,1);(2,1)}; B' = $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$
- ✓ B = {(1,1);(2,1)}; B' = $\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$

ESERCIZIO 2.3. Sia L : $\mathbf{R}_2[x] \to M_2(\mathbf{R})$ l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alle basi:

B ={$1+x$; $x+x^2$; $-x^2$} e B' = $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$

è:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Esprimere $L(a+bx+cx^2)$ come combinazione lineare dei vettori della base canonica.
L'applicazione L è iniettiva? E' suriettiva?

PROPOSIZIONE 2.1. Siano V e V' spazi vettoriali su **K** e siano $B = \{e_1,..,e_n\}$ una base di V (dim V= n) e $B' = \{e_1',..,e_m'\}$ una base di V'(dim V'= m). L'applicazione lineare φ: Hom(V,V') $\to$ $M_{m,n}(\mathbf{R})$ definita da: $\varphi(L)$ è la matrice associata ad L rispetto alle basi B e B’, per ogni applicazione lineare L: V→ V’,è un isomorfismo. Pertanto la dimensione dello spazio vettoriale Hom(V,V’) è mn.

Dim.

Per le proprietà delle operazioni tra matrici si ha:

$$\varphi(L_1 + L_2) = \varphi(L_1)+ \varphi(L_2),\ \varphi(kL)= k\ \varphi(L).$$

L’applicazione lineare φ è iniettiva in quanto Ker φ ={$\underline{0}$}, infatti l’unica applicazione lineare che ha per matrice associata la matrice nulla è l’applicazione di costante valore $\underline{0}$. Inoltre φ è suriettiva in quanto data una matrice A, l’applicazione lineare L che al vettore v = BX di coordinate X associa L(v) = B’AX è tale che φ(L) =A.

□

PROPOSIZIONE 2.2. Siano V, V’, V” spazi vettoriali sul campo **K** e B,B’,B” le rispettive basi. Siano L_1: V→V’ e L_2: V’→V” applicazioni lineari. Allora:

$$M^B_{B''}(L_2 \circ L_1) = M^{B'}_{B''}(L_2) \circ M^B_{B'}(L_1)$$

Dim.

Posto $A_1 = M^B_{B'}(L_1)$ e $A_2 = M^{B'}_{B''}(L_2)$, allora se v = BX, $L_1(v) = B'A_1X$ e se v’= B’X’ si ha $L_2(v') = B''A_2X'$. Si ha:

1.$(L_2 \circ L_1)(v) = B''\ M^B_{B''}(L_2 \circ L_1)X$.

2.$(L_2 \circ L_1)(v) = L_2(L_1(v)) = B''A_2(A_1X) = B''(A_2A_1)X$.

Confrontando 1 e 2 ed essendo univocamente determinata la n-pla delle coordinate, si ha $M^B_{B''}(L_2 \circ L_1) = A_2A_1$.

□

Dunque la matrice associata ad un isomorfismo L:V→ V’è invertibile e la sua inversa è la matrice associata ad L^{-1}: V’→ V, inversa di L.

ESERCIZIO 2.4. Determinare una applicazione lineare L: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ la cui immagine Im L sia generata dai vettori: (1,2,0-4) e (2,0,-1,-3).

ESERCIZIO 2.5. Determinare una base dello spazio vettoriale Hom($\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$).

Sia V uno spazio vettoriale su **K** e siano B e B’ due basi di V. Allora per ogni vettore v di V si ha v = BX = B’X’ dove X è la colonna delle coordinate di v rispetto a B e X’ è la colonna delle coordinate di v rispetto a B’. Si ha :

$$(2.5.1)\ X' = AX$$

dove A è la matrice associata all’identità rispetto alle basi B e B’; tale matrice si dice *matrice di transizione dalla base* B *alla base* B’(o matrice del cambiamento di base) e la (2.5.1.) esprime le coordinate di un vettore rispetto alla base B’ in funzione delle sue coordinate rispetto alla base B.

ESERCIZIO 2.6. Siano B = {(1,0);(0,1)} e B’ = {(1,3);(2,5)} basi di $\mathbf{R}^2$.

i) Trovare la matrice di transizione dalla base B alla base B’.
ii) Trovare la matrice di transizione dalla base B’ alla base B.
iii) Verificare che le due matrici sono una l’inversa dell’altra.
iv) Determinare la coordinate del vettore (-3,7) rispetto alla base B’.