CORSO di ALGEBRA (M-Z)

PROVA SCRITTA
12-11-2012

Svolgere gli esercizi esplicitando il percorso logico seguito per giungere alla soluzione. E' permesso solo consultare appunti e testi.

Parte I

ESERCIZIO 1.1. Determinare il numero degli "anagrammi" (anche privi di senso) della parola PASSEGGIATA. Determinare quanti fra questi contengono almeno una delle sequenze: PAS, ASA, SET.

ESERCIZIO 1.2. Dati i numeri m = 1925 e n = 1764, determinare:
a) il MCD(1925,1764) mediante l'algoritmo di Euclide,
b) una identità di Bézout,
c) l'insieme delle soluzioni intere dell'equazione diofantea: 1925x+1764y = 77.

Parte II

ESERCIZIO 2.1. . Dato il sistema lineare:

$$\begin{cases} -3kx - ky + 2z = -3k \\ kz - 2y = 1 \\ -9x - 5y + 5z = 1 - 3k \end{cases}$$

Determinare per quali valori del parametro reale k :
a. il sistema ammette soluzioni.
b. il sistema ammette 1 sola soluzione.

Determinare le soluzioni del sistema al variare di k.

ESERCIZIO 2.2. . Sia $R_2[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi nell'indeterminata t a coefficienti reali di grado ≤ 2. Sia L l'endomorfismo definito ponendo:
$L(a+bt+ct^2) = (2a+b-c) - 4at - 4at^2$, per ogni polinomio $a+bt+ct^2$ di $R_2[t]$.
Determinare :
a. il nucleo e l'immagine di L,
b. i sottospazi (Im L) ∩ (Ker L) e (Im L) + (Ker L),
c. gli autovalori di L e una base di ogni autospazio,
d. una base B' di $R_2[t]$,se esiste, tale che la matrice D associata a L rispetto a B' sia diagonale,
e. $L^{-1}(3(k+1)+kt+k^2t^2)$ per ogni numero reale k,