CORSO di ALGEBRA (M-Z)
PROVA SCRITTA
11-07-2012

SOLUZIONI

Svolgere gli esercizi esplicitando il percorso logico seguito per giungere alla soluzione. E' permesso solo consultare appunti e testi non di esercizi.

Parte I

ESERCIZIO 1.1. Determinare il numero degli "anagrammi" (anche privi di senso) della parola "MATEMATICA". Quanti di questi contengono almeno una delle sequenze MAT, ATI e ATA?

Sol. Il numero degli "anagrammi" della parola MATEMATICA è uguale al numero delle classi di equivalenza rispetto alla relazione su S_{10} definita da: due permutazioni σ e τ sono equivalenti se individuano lo stesso anagramma. Pertanto il numero degli anagrammi è uguale $\frac{10!}{3!2!2!}$, ossia al numero di tutte le permutazioni diviso il numero degli elementi di ogni classe. Indicati con:

A = insieme degli anagrammi che contengono la sequenza MAT,
B = insieme degli anagrammi che contengono la sequenza ATI,
C = insieme degli anagrammi che contengono la sequenza ATA,
allora il numero degli anagrammi che contengono almeno una della sequenze date è $|A\cup B\cup C|$, tale numero si calcola con il principio di inclusione-esclusione:
$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$.
Risulta:
$|A| = \frac{8!}{2!}$, $|B| = \frac{8!}{2!2!}$, $|C| = \frac{8!}{2!}$, $|A\cap B| = 6! + \frac{7!}{2!} - 5!$, $|A\cap C| = 6!+7!-5!$, $|B\cap C| = 2\frac{6!}{2!}$, $|A\cap B\cap C| = 5!+5!+5! - 4!$

Ad esempio l'insieme $(A\cap B\cap C)$ è costituito dall'insieme H delle parole ottenute permutando MATATI, E, M, C, A, dall'insieme J delle parole ottenute permutando MATA, ATI, E, M, C, e dall'insieme K delle parole ottenute permutando MATI, ATA, C, E, M. Risulta $H\cap J = H\cap K = \emptyset$, mentre l'insieme $J\cap K$ è costituito dalle parole ottenute permutando MATA, MATI , C, E; pertanto si ha:
$|A\cap B\cap C| = 5!+5!+5! - 4!$.

ESERCIZIO 1.2. Nell'anello $\mathbf{Z}_{16}$ determinare :

a) le soluzioni dell'equazione [106] x= [14],

b) il gruppo degli elementi invertibili e la sua cardinalità.

Sol. Poiché il MCD(106,16) = 2 divide 14, l'equazione [106] x = [14] è compatibile in $\mathbf{Z}_{16}$. Le soluzioni sono le classi di equivalenza mod16 nelle quali è ripartita la

classe di equivalenza $[s]_8$, unica soluzione dell'equazione $[53]_8\ x = [7]_8$. Dunque si ha:
$x = [s]_8 = [53]_8^{-1}[7]_8 = [5]_8^{-1}[7]_8 = [5]_8[7]_8 = [35]_8 = [3]_8$. Pertanto le soluzioni dell'equazione data sono: $[3]_{16}$, $[3 + \frac{16}{2}]_{16} = [11]_{16}$.
Il gruppo $U(\mathbf{Z}_{16})$ degli elementi invertibili di $\mathbf{Z}_{16}$ è:

$$U(\mathbf{Z}_{16}) = \{[n]_{16}: n \text{ è coprimo con } 16 \text{ e } n<16\}$$

e risulta $|U(\mathbf{Z}_{16})| = \varphi(16) = 8$, essendo φ la funzione di Eulero.

Parte II

ESERCIZIO 2.1. Sia $\mathbf{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 2. Sia L l'endomorfismo di $\mathbf{R}_2[x]$ definito da:

$$L(a+bx+cx^2) = 2a + b+(a+b-c)x+(-b + 2c)x^2$$

Determinare:

i. La matrice associata ad L rispetto alla base canonica.
ii. Una base del nucleo e una dell'immagine di L.
iii. La matrice associata ad L rispetto alla base: $B = \{1,1+x,1-x^2\}$
iv. L'endomorfismo è diagonalizzabile? Motivare la risposta.

Sol. La matrice A associata ad L rispetto alla base canonica ha per colonne le coordinate, rispetto alla base canonica, dei vettori $L(1)$, $L(x)$, $L(x^2)$. Si ha:
$L(1) = 2+x$, $L(x) = 1+x-x^2$, $L(x^2) = -x +2x^2$ e quindi:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice A è equivalente per righe alla matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

E dunque $r(A) = \dim ImL = 2$ ed essendo $3 = \dim \mathbf{R}_2[x] = \dim ImL + \dim KerL$, si ha $\dim KerL = 1$. Una base di ImL è $\{(1+x-x^2), (x-2x^2)\}$, ed essendo $KerL$ costituito dai vettori le cui coordinate sono soluzioni del sistema $AX = 0$, una base di $KerL$ è $\{(-1+2x+x^2)\}$.
La matrice associata ad L rispetto alla base B è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

infatti:
$L(1) = 2+x = 1+(1+x)$, $L(1+x) = 3+2x-x^2 = 2(1+x)+(1-x^2)$, $L(1-x^2) = 2+2x-2x^2= -2+2(1+x)+2(1-x^2)$.
Gli autovalori di L sono: 0,2,3, in quanto zeri del polinomio caratteristico:

det(A−λI) = λ(2−λ)(λ−3). Pertanto l'endomorfismo dato è diagonalizzabile in quanto è definito su uno spazio vettoriale di dimensione 3 e ha tre autovalori distinti.

ESERCIZIO 2.2. Considerato lo spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$, si provi che il sottoinsieme:

$$H = \{(a, b, c) : a = 2c; b = 0\}$$

è un sottospazio. Determinare due sottospazi W e K tali che $H \oplus W = H \oplus K = \mathbf{R}^3$.

Sol. L'insieme H è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$ in quanto è lo spazio delle soluzioni di un sistema omogeneo. Una base di H è {(2,0,1)}. Si osservi che i sottospazi W e K devono avere dimensione 2 e (W∩K) deve avere dimensione 1. I sottospazi W = <(0,1,0);(0,0,1)> e K = <(2,1,1);(0,0,1)> sono due sottospazi verificanti le condizioni richieste in quanto le matrici:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hanno rango 3.