CORSO DI ALGEBRA (M-Z)
Prof. A. Venezia

Complementi ed Esercizi
Gennaio 2012

1. SPAZI VETTORIALI: prime proprietà.

In uno spazio vettoriale (V, +, $\cdot$) sul campo K, il vettore nullo è necessariamente unico ed è anche unico per ogni vettore il suo opposto. Inoltre si ha:

1. Per ogni vettore v : $0\, v = \underline{0}$
2. Per ogni scalare k : $k\, \underline{0} = \underline{0}$
3. Per ogni vettore v e per ogni scalare k : $k\,(-v) = -kv = (-k)\, v$

Dim .1.

Risulta: $0v = (0+0)v =$ (distributiva) $0v + 0v$. Poiché ogni vettore ha un opposto, dalla uguaglianza precedente sommando ad entrambi i termini $-0v$ si ricava.

$\underline{0} = 0v-0v = (0v + 0v)-0v = 0v+(0v-0v) = 0v + \underline{0} = 0v$

Dim. 3

$k(-v) + k\,v = k\,(v-v) = k\,\underline{0} = \underline{0}$ dunque $k(-v)$ è l'opposto di kv e cioè $k(-v) = -kv$

$(-k)v + kv = (k-k)\, v = 0v = \underline{0}$, cioè $(-k)\, v = -kv$

ESERCIZIO 1.Quali dei seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ sono sottospazi ?

$A = \{ f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} : f(1/2) = 0\}$

$B = \{ f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} :$ f(x) è pari per ogni x$\}$

$C = \{ f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} : f(0) = f(1)\}$

$D = \{ f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} : f(1) = 0\}$

$E = \{ f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} : f(0) = f(1)^2\}$

L'intersezione di due sottospazi è sempre un sottospazio, l'unione di due sottospazi W e U è un sottospazio se e solo se $W \subseteq U$ oppure $U \subseteq W$.

Dim.

Supponiamo che $W \cup U$ sia un sottospazio. Si deve quindi dimostrare che se W non è un sottoinsieme di U allora necessariamente U deve essere un sottoinsieme di W. Infatti sia $u \in U$. Poiché W non è contenuto in U, esiste un vettore w di W non appartenente ad U. Si ha $u, w \in W \cup U$ e quindi essendo l'unione un sottospazio il vettore $u + w \in W \cup U$. Il vettore $v = u + w$ non può appartenere ad U (altrimenti $v-u = w \in U$) e quindi appartiene a W, per cui $u = v-w \in W$. Si è dunque dimostrato che ogni vettore u di U appartiene anche a W , cioè $U \subseteq W$.

Ovviamente se $W \subseteq U$, si ha $W \cup U = U$ e quindi l'unione è un sottospazio.

La somma di due sottospazi U e W:

$$U + W = \{ v \in V : \ v = u + w \ \text{ con } u \in U \text{ e } w \in W\}$$

ed uguale al sottospazio $< U \cup W >$ generato da $(U \cup W)$. Il sottospazio $< U \cup W >$ è anche l'insieme delle combinazioni lineari di vettori di $U \cup W$.

La somma $U + W$ si dice *diretta,* e si indica con $U \oplus W$, se per ogni vettore v di $U + W$ esiste un solo vettore u in U e un solo vettore w in W tale che $v = u + w$. In altre parole la somma si dice diretta se, per ogni vettore v di $U + W$, l'identità $v = u + w = u' + w'$ con $u,u' \in U$ e $w, w' \in W$. implica $u = u'$ e $w = w'$.

La somma di due sottospazi $U + W$ è diretta se e solo se $U \cap W = \{ \underline{0} \}$

Dim.

Supponiamo che la somma sia diretta. Sia $v \in U \cap W$, se v non fosse il vettore nullo $v = v + 0$ e $v = 0 + v$ sarebbero due modi di scrivere v come somma di un vettore di U e uno di W. Supponiamo viceversa $U \cap W = \{ \underline{0} \}$ e sia $v = u + w = u' + w'$ con $u,u' \in U$ e $w, w' \in W$. Il vettore $u - u' = w' - w \in U \cap W$ e quindi $u - u' = w' - w = \underline{0}$, cioè $u = u'$ e $w = w'$.

ESEMPIO . Sia $(M_n(\mathbf{R}),+,\cdot)$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n.

Data una matrica $A = (a_{ij})$ si dice *trasposta di* A, e si indica con A^t, la matrice le cui righe sono le colonne di A, cioè $A^t = (a_{ji})$. Risulta:

$$(A+ B)^t = A^t + B^t \text{ e } (kA)^t = kA^t$$

Una matrice $A = (a_{ij})$ dice *simmetrica* se $A = A^t$, *antisimmetrica* se $A = -A^t$.

L'insieme U delle matrici simmetriche e l'insieme W delle matrici antisimmetriche sono sottospazi di $M_{nn}(\mathbf{R})$ (dimostrarlo !) e si ha :

$$M_{nn}(\mathbf{R}) = U \oplus W \ \text{ (dimostrarlo!)}$$

ESERCIZIO 2.

Dati i sottospazi T, U, W di uno spazio vettoriale, dimostrare che, se T è un sottoinsieme di W, allora:

$$T + (U \cap W) = (T+ U) \cap W$$

Dim.

Sia v un vettore di $T + (U \cap W)$, allora $v = t + v'$ dove $t \in T$ e $v' \in U \cap W$. Quindi si ha: $v = t + v'$ con $t \in T$ e $v' \in U$, cioè $v \in T + U$. Inoltre v è la somma di due vettori di W ($t \in T \subseteq W$ per ipotesi e $v' \in W$) e quindi v è un vettore di W. Pertanto $v \in (T+U) \cap W$. Analogamente si dimostra che

$$(T+U) \cap W \subseteq T + (U \cap W).$$

ESERCIZIO 3. Sia $(V,+,\cdot)$ uno spazio vettoriale su **K.** Dimostrare che Linsieme dei sottospazi di V con la relazione di inclusione è un reticolo.