CORSO di ALGEBRA (M-Z)
ESERCITAZIONE 2
(14-10-2011)

1. FUNZIONI INIETTIVE, SURIETTIVE. COMPOSIZIONE

1.1. Sia f: **Z** x**Z**$\rightarrow$**Z**x**Z** definita da: f(a,b)=(a+2b,-b) e sia g: **Z** x**Z**$\rightarrow$**Z**x**Z** definita da: g(a,b)= (-a,3b).Verificare se f e g sono funzioni iniettive e se sono suriettive. Definire ($f \circ g$) e ($g \circ f$) e verificare se sono iniettive e se sono suriettive.

Si denoti con id(A) l'endofunzione identità, ossia id(A)(a) = a per ogni a di A. Siano f: A$\rightarrow$B e g : B$\rightarrow$A applicazioni tali che ($g \circ f$) = id(A), allora g si dice *inversa sinistra* di f e l'applicazione f si dice *inversa destra* di g.

1.2. Dimostrare che f :A$\rightarrow$B (A$\neq\emptyset$) ha una inversa sinistra se e solo se è iniettiva.
1.3. Dimostrare che f: A$\rightarrow$B (A$\neq\emptyset$) ha un' inversa destra se e solo se è suriettiva.
1.4. Sia f : A$\rightarrow$B. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti.
a) f è iniettiva
b) per ogni X $\in P$(A) si ha: $f^{-1}(f(X)) \subseteq X$
c) per ogni X e Y sottoinsiemi di A si ha: $f(X\cap Y) = f(X)\cap f(Y)$
1.5. Verificare se le seguenti funzioni sono iniettive e se sono suriettive:
- ✓ f : $\mathbf{R}^+\rightarrow\mathbf{R}$: f (x) = log x
- ✓ f: $\mathbf{R} \rightarrow\mathbf{R}$: f(x) =|x|
- ✓ f: $\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}^+$: $f(x) = x^2 +1$
- ✓ f : **R** x**R** $\rightarrow$**R** : $f(x,y) = x^2+y^2$
- ✓ f: **R** x**R** $\rightarrow$**R** : f(x,y)= 3x-1
- ✓ f: **R** $\rightarrow$**R**x**R** : $f(x)=(x^2,x+1)$
- ✓ Sia A un insieme e sia S$\subseteq$A, f : P(A)$\rightarrow$ P(A) : f(X)= X$\cup$S

1.6. Esprimere le funzioni precedenti come composizione di una funzione suriettiva e di una iniettiva.

2. I numeri naturali e il principio di induzione.

L'insieme **N** dei numeri naturali è definito dalle seguenti proprietà:
I. Esiste una funzione σ : **N**$\rightarrow$**N** iniettiva.
II. Esiste un elemento 0 tale che $0\notin$ Im σ .
III. (Principio di induzione) Sia U un sottoinsieme di **N** tale che:
$0\in U$, se $n\in U$ anche $\sigma(n)\in U$
allora U = **N**.

2.1. Dimostrare che Im σ = **N**-{0}.
2.2. Dimostrare che $\sigma^n(0) = n$.
2.3. Sia (M,.) un monoide con unità 1_M e sia $a \in M$. Le iterazioni della operazione . sono definite da:
$a^0 = 1_M$, $a^{n+1} = a.a^n$. Dimostrare che $a^m.a^n = a^{m+n}$ e $(a^m)^n = a^{mn}$.
2.4. Sia (M,.) un monoide e sia $a \in M$. Dimostrare che esiste un solo morfismo di monoidi
$f : (\mathbf{N},+) \to (M,.)$ tale che $f(1) = a$. k
2.5. Dimostrare il teorema di divisione: Dati due interi k ed n, con n>0, esiste una sola coppia di interi (q,r) tali che:
$k=qn+r$ e $0 \leq r<n$.
2.5. Dati due interi x e y, dimostrare che (x-y) divide (x^n-y^n)per ogni $n \in \mathbf{N}$.
2.6. La successione di Fibonacci definita da: $a_0=0$, $a_1=1$, $a_n = a_{n-1}+a_{n-2}$per ogni $n \geq 2$, è un esempio di successione definita induttivamente. Provare che a_n e a_{n+1} non hanno fattori in comune eccetto 1.

3. Equipotenza e cardinalità

3.1. Dimostrare il principio della somma: A,B insiemi finiti $A \cap B = \emptyset$, $|A \cup B| = |A|+|B|$.
3.2. Dimostrare il principio del prodotto: A,B insiemi finiti $|AxB|=|A|.|B|$.
3.3. Siano R,S,A,B insiemi con $A \cap B = \emptyset$. Dimostrare che $|R^{A \cup B}| = |R^A x R^B|$, $|(RxS)^A| = |R^A x S^A|$, $|(R^A)^B| = |R^{AxB}|$.
3.4. Siano A,R, insiemi finiti. Determinare il numero delle funzioni iniettive da A in R.
3.5.Si indichi con $\binom{n}{k}$ il numero dei sottoinsiemi con k elementi di un insieme con n elementi, tale numero si chiama coefficiente binomiale.
Dimostrare che:
$\binom{0}{0} = 1$, $\binom{0}{k} = 0$ con $k \neq 0$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$
3.6. Dimostrare il teorema binomiale: per ogni $x,y \in \mathbf{R}$ si ha:
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$
3.7.Dimostrare che l'insieme dei sottoinsiemi di un insieme di cardinalità n ha 2^nelementi. Quindi:
$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.
3.8. Dimostrare che $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$
3.9. Dimostrare il principio di inclusione esclusione: Sia t>1 e siano $A_1,\ldots A_t$ sottoinsiemi finiti di un insieme R . Allora si ha:
$$|\cup_{i=1,..t} A_i| = \Sigma_{\emptyset \neq I} (-1)^{|I|-1} |\cap_{i \in I} A_i|$$

dove la somma è estesa a tutti i sottoinsiemi non vuoti I dell'insieme $\{1,\ldots,t\}$.