CORSO DI ALGEBRA (M-Z)

Prof. A. Venezia

COMPLEMENTI ED ESERCIZI
Gennaio 2012

INSIEMI DIPENDENTI e INSIEMI INDIPENDENTI

Sia (V,+, .) uno spazio vettoriale sul campo **K.** Un sottoinsieme S di V si dice *dipendente* se esiste un vettore v di S che dipende dai vettori di S -{v} , in altre parole se esiste v tale che $v \in <(S-\{v\})>$ In caso contrario S si dice *indipendente*, cioè S è indipendente se e solo se per ogni vettore v di S risulta $v \notin <(S-\{v\})>$.

Gli insiemi dipendenti sono caratterizzati come segue :

a) S è dipendente (cioè per definizione esiste $v \in S$ tale che $v \in <(S-\{v\})>$
b) Esiste una combinazione lineare di vettori di S con coefficienti non tutti nulli uguale al vettore nullo, cioè $\underline{0} = a_1 v_1+\ldots\ldots+a_n v_n$ dove $v_i \in S$ per ogni i=1,…,n. ed esiste i =1,…n tale che $a_i \neq 0$.
c) Esiste un vettore $v \in S$ tale che $<(S -\{v\})> = < S>$

Gli enunciati a), b), c) sono equivalenti.
Dimostrazione di a) $\Rightarrow$ b).
Se S è dipendente esiste un $v \in S$ combinazione lineare di vettori di S -{v} , cioè $v = a_1 v_1+\ldots\ldots+a_n v_n$ con $v_i \neq v$ per ogni i = 1,…,n. Pertanto la combinazione cercata è : $\underline{0} = a_1 v_1+\ldots\ldots+a_n v_n - v$.
Dimostrazione di b) $\Rightarrow$ c).
Sia $\underline{0} = a_1 v_1+\ldots\ldots+a_n v_n$ la combinazione non banale uguale al vettore nullo. Si può sempre supporre $a_1 \neq 0$ e quindi $v_1 = - a_2v_2/a_1 +\ldots.. - a_nv_n/a_1$. Pertanto ogni vettore w di $<S>$ si può scrivere come combinazione lineare dei vettori di $< S -\{v_1\} >$ perché nella combinazione lineare che esprime un vettore w come elemento di $< S>$ si può sostituire v_1 con $(- a_2v_2/a_1 +\ldots.. - a_nv_n/a_1)$.
Infine banalmente si ha c) $\Rightarrow$ a).

ESERCIZIO 1 : Dimostrare le seguenti caratterizzazioni degli insiemi indipendenti, ossia dimostrare che a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ a):

a) Il sottoinsieme S è indipendente.
b) L'unica combinazione lineare dei vettori di S uguale al vettore nullo è quella banale.
c) Per ogni vettore v di S si ha che $<(S-\{v\})>$è un sottoinsieme proprio di $< S>$.

OSSERVAZIONI:

1. La dipendenza e l'indipendenza lineare è una proprietà dei vettori che dipende dal campo **K** su cui è costruito lo spazio vettoriale. Ad esempio nello spazio vettoriale (**C, +,** $\cdot$) sul campo complesso **C,** i vettori 1 e i sono dipendenti (i =1i) e quindi l'insieme {1,i} è dipendente. Nello spazio vettoriale (**C**,+, $\cdot$) sul campo reale **R** lo stesso insieme è indipendente.

2. Se ad un insieme dipendente S si aggiunge un vettore v, l'insieme $S \cup \{v\}$ è sempre dipendente.

3. (Proprietà fondamentale degli insiemi indipendenti). Sia S un sottoinsieme indipendente. Se v è un vettore risulta:

$$S \cup \{v\} \text{ è dipendente se e soltanto se } v \in \langle S \rangle$$

che è equivalente ad affermare:

$$S \cup \{v\} \text{ è indipendente se e solo se } v \notin \langle S \rangle$$

ESERCIZIO 2. Nello spazio (**$\mathbf{R}^4$, +,** $\cdot$ **)** su **R**, siano:

$$v_1 = (1,2,0,3),\ v_2 = (0,1,1,0),\ v_3 = (-1,-2,0,-3),\ v_4 = (0,0,1,-2).$$

a) I sottoinsiemi $\{v_1,v_2\}$, $\{v_1,v_3\}$, $\{v_1,v_4\}$, $\{v_1,v_2,v_4\}$, $\{v_1,v_3,v_4\}$ sono dipendenti o indipendenti?

b) Il vettore (1,-1,-4,5) dipende dai vettori v_1,v_2,v_3,v_4 ?

c) L'insieme $S = \{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ è dipendente ?

d) Trovare, se esiste, un vettore non appartenente allo spazio generato da S.

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale delle funzioni (**$\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$,+,.**) su **R** , dimostrare che l'insieme di funzioni {sen x, cos x, x} è indipendente.

Dim.

Poiché l'insieme F = {sen x, cos x} è indipendente (verificarlo!), basta dimostrare che la funzione x non appartiene allo spazio generato da F. Infatti se fosse:

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x = x \text{ per ogni } x,$$

per x = 0 si avrebbe: $a \operatorname{sen} 0 + b \cos 0 = b = 0$ e per $x = \pi/2$: $a \operatorname{sen} \pi/2 + \cos\pi/2 = a = \pi/2$. Ma la funzione $\pi/2 \operatorname{sen} x$ è diversa dalla funzione x, essendo ad esempio $\pi/2 \operatorname{sen} \pi/3 \neq \pi/3$.

ESERCIZIO 4. Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $w_1 = (1,1,0)$ e $w_2 = (2,k,1)$.

a) Determinare per quali valori di k l'insieme $\{w_1,w_2\}$ è indipendente,
b) determinare per quali valori di k il vettore v = (-2,1,k) appartiene d W,
c) determinare un sottoinsieme G contenente w_1 e w_2 tale che $\langle G \rangle = \mathbf{R}^3$.
d) determinare un sottospazio U tale che W+U sia diretta,
e) determinare un sottospazio di W non banale.