ALGEBRA

ESAME: PRIMA PARTE
18 GENNAIO 2013

C. MALVENUTO - CANALE A-L

Istruzioni.

- Completare subito la parte inferiore di questa pagina con il proprio nome, cognome e firma.
- Scrivere solamente su questi fogli, anche dietro se occorre, a penna o a matita. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici.
- Tutte le risposte vanno **motivate**.
- **Non parlare** pena il ritiro immediato del compito.

ESERCIZIO	PUNTEGGIO
1	/ 8
2	/ 6
3	/ 8
4	/ 8
TOTALE	/30

Nome e Cognome ↓	**Firma ↓**

Esercizio 1. (8 punti)

Nel gruppo simmetrico $(S_8, \circ)$ si considerino le seguenti permutazioni

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 1 & 8 & 3 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 8 & 5 & 7 & 1 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 6 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 7 & 1 & 8 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Scrivere la decomposizione di $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ in prodotto di cicli disgiunti.

(b) Calcolare $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \tau_3 \circ \tau_4$ e scriverla come prodotto dei suoi cicli disgiunti.

(c) Determinare una decomposizione di σ come prodotto di trasposizioni, la sua parità e il suo ordine in S_8.

(d) Calcolare σ^{126}.

Esercizio 2. (6 punti) Determinare le soluzioni dell'equazione congruenziale

$$171x \equiv 20 \pmod{299}.$$

Scrivere l'insieme delle soluzioni come elemento di $\mathbb{Z}_{299}$ (anello delle classi resto modulo 300), scegliendo opportunamente il rappresentante tra 0 e 298, ed eseguire la verifica.

Esercizio 3. (8 punti) Sia $G = U(\mathbb{Z}_8)$ il gruppo moltiplicativo degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_8$ e $G' = U(\mathbb{Z}_{12})$ il gruppo moltiplicativo degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{12}$. Si dimostri che G e G' sono isomorfi. (Per evitare ambiguità, si denotino con $\overline{x}$ le classi resto modulo 8, e con $[x]$ le classi resto modulo 12.)

Esercizio 4. (8 punti)

Sia $B = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : ad \neq 0 \}$.

(a) Mostrare che $B \leq GL_2(\mathbb{R})$, cioè è sottogruppo delle matrici 2×2 a coefficienti reali invertibili.

(b) B è abeliano? Motivare la risposta.