ALGEBRA

ESAME: PRIMA PARTE
4 FEBBRAIO 2013

C. MALVENUTO - CANALE A-L

Istruzioni.

- Completare subito la parte inferiore di questa pagina con il proprio nome, cognome e firma.
- Scrivere solamente su questi fogli, anche dietro se occorre, a penna o a matita. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici.
- Tutte le risposte vanno **motivate**.
- **Non parlare** pena il ritiro immediato del compito.

ESERCIZIO	PUNTEGGIO
1	/ 9
2	/ 6
3	/ 15
TOTALE	/30

Nome e Cognome ↓	**Firma** ↓

Esercizio 1. (9 punti)

(a) Data la permutazione

$$\alpha = (1,7)(1,2,3)(3,4,6)(3,6,5)(1,5,8)(1,8,9),$$

scrivere α come prodotto dei suoi cicli disgiunti e determinarne l'ordine, una fattorizzazione in trasposizioni e la parità.

(b) Detto $H =< \alpha >$ il sottogruppo ciclico generato da α, elencare tutti i suoi sottogruppi. Determinare almeno un generatore per ogni sottogruppo di H.

(c) Disegnare il diagramma di Hasse dell'ordine parziale $\leq$ tra i sottogruppi di H, dove per ogni S, T sottogruppo di H si definisce:

$$S \leq T \Leftrightarrow \text{S è sottogruppo di } T.$$

Esercizio 2. (6 punti) Data l'equazione diofantea di primo grado

$$132x + 51y = 6,$$

dire se ne esistono soluzioni intere e nel caso affermativo trovarne almeno una.

Esercizio 3. (15 punti)

Sia dato il gruppo moltiplicativo $(U_{20}, \cdot)$ delle classi resto invertibili di $\mathbb{Z}_{20}$.

(a) Elencare gli elementi di U_{20}.

(b) Calcolare l'inverso di $\overline{13}$ in U_{20}.

(c) Determinare l'ordine di tutti gli elementi di U_{20}.

(d) Determinare se in U_{20} vi sono sottogruppi isomorfi al gruppo di Klein, e nel caso quanti e quali sono.

(e) Elencare i sottogruppi ciclici distinti di U_{20}.

(f) Dedurre, utilizzando i punti precedenti, se U_{20} è un gruppo ciclico.