ALGEBRA

ESAME: SECONDA PARTE
18 GENNAIO 2013

C. MALVENUTO - CANALE A-L

Istruzioni.

- Completare subito la parte inferiore di questa pagina con il proprio nome, cognome e firma.
- Scrivere solamente su questi fogli, anche dietro se occorre, a penna o a matita. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici.
- Tutte le risposte vanno **motivate**.
- **Non parlare** pena il ritiro immediato del compito.

ESERCIZIO	PUNTEGGIO
1	/ 8
2	/ 6
3	/ 16
TOTALE	/30

Nome e Cognome ↓	**Firma ↓**

Esercizio 1. (8 punti) Sia $G = U(\mathbb{Z}_{21})$ il gruppo moltiplicativo delle classi resto invertibili di $\mathbb{Z}_{21}$ e sia H il sottogruppo di $(G, \cdot)$ generato da $\overline{4}$.

(a) Elencare gli elementi di G, di H e le classi laterali di G/H.

(b) Stabilire se il gruppo quoziente G/H è ciclico oppure no, spiegando perché.

Esercizio 2. (6 punti) Dati i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$U =< \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} > \quad W =< \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} >,$$

trovare una base di U, una di W e una di $U + W$.
Dedurre la dimensione di $U \cap V$.

Esercizio 3. (16 punti)

Dato $V = \mathbb{R}_3$ lo spazio dei vettori-colonna a coefficienti reali , sia definito $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo di V tramite:

$$f(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -2x + 3y + 3z \\ y \\ 3x - 3y - 2z \end{bmatrix}$$

(a) Si scriva la matrice A che esprime l'applicazione lineare f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ dello spazio V .

(b) Si dimostri (motivando la risposta) che f è diagonalizzabile, calcolando gli autovalori di A e la rispettiva molteplicità algebrica e geometrica.

(c) In caso affermativo, determinare una base $\mathcal{B}$ di autovettori per f e la matrice D che esprime f in questa base.

(d) Si determini una matrice non singolare C tale che $D = C^{-1}AC$.

(e) Si calcoli la matrice C^{-1}