Esercizio 1. (6 punti)

(a) Data la permutazione

$$\alpha = (1,2)(1,3,2)(1,2)(4,5,6)(4,5,6,7,8)(4,6,5),$$

del gruppo simmetrico S_8, scrivere α come prodotto di cicli disgiunti;

(b) determinarne l'ordine, una decomposizione come prodotto di 2-cicli e la parità;

(c) determinare il sottogruppo ciclico $H =< \alpha^{320} >$ di S_8 generato da α^{320}, e scrivere tutti i suoi generatori.

Eseguiamo il prodotto composizionale di permutazioni (da destra verso sinistra) per ottenere:

$\alpha = (1,2,3)(4,7,8,5,6)$

L'ordine di α è il ~~prodotto~~ minimo comune multiplo degli ordini dei suoi cicli disgiunti: $o(\alpha) = mcm(3,5) = 15$

$\alpha = (13)(12)(46)(45)(48)(47)$ è una possibile decomposizione di α in 6 scambi del tipo (i,j).

Quindi la sua parità è la parità di 6: α è pari

$$\alpha^{320} = \alpha^{15\cdot 21+5} = (\alpha^{15})^{21}\cdot\alpha^5 = id\cdot\alpha^5 = (123)^5 = (123)^2 = (132)$$

Quindi $H = <(132)>$ è generato da un 3-ciclo

$= <\alpha^5> = \{(1)(2)(3), (132), (132)^2 = \alpha^{10} = (123)\}$

(è di ordine 3): i suoi generatori sono

α^5 e α^{10} cioè (132) e (123).

Esercizio 2. (6 punti)

Dato il gruppo $U(\mathbb{Z}_9)$ delle classi resto modulo 9 invertibili rispetto al prodotto di classi resto:

(a) verificare che è un gruppo ciclico;

(b) determinarne tutti i generatori;

(c) disegnare il diagramma di Hasse dei suoi sottogruppi.

$\mathbb{Z}_9 = \{ \bar{r} : r \in \{0, \dots, 8\} \}$

Le classi invertibili sono quelle il cui rappresentante è coprimo con 9:

$U(\mathbb{Z}_9) = \{ \bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{8} \}$, gruppo di ordine 6.

Per vedere che $U(\mathbb{Z}_9)$ è ciclico, occorre trovare un suo elemento di ordine 6, se esiste:

$o(\bar{1}) = 1$. Inoltre gli elementi di un gruppo di ordine 6 possono avere ~~solo~~ periodo un divisore di 6: 1, 2, 3 oppure 6.

Calcoliamo le potenze di $\bar{2}$:

$\bar{2}^0 = \bar{1}$, $\bar{2}^1 = \bar{2}$, $\bar{2}^2 = \bar{4}$, $\bar{2}^3 = \bar{8} \neq 1$: non essendo di ordine 1, 2 o 3, $\bar{2}$ dovrà necessariamente avere ordine 6

(si possono calcolare $\bar{2}^4 = \bar{7}$, $\bar{2}^5 = \bar{5}$, $\bar{2}^6 = \bar{1}$, ma per il ragionamento precedente non serve

$U(\mathbb{Z}_9) = \langle \bar{2} \rangle = \langle x : x^6 = 1 \rangle$ con $x = \bar{2}$.

Quindi i generatori di $U(\mathbb{Z}_9)$ sono x^h, con $1 \leq h < 6$, h coprimo con 6, cioè $\bar{2}^1$ e $\bar{2}^5 = \bar{5}$.

I sottogruppi del gruppo ciclico $U_{\mathbb{Z}_9}$:

$\langle \bar{1} \rangle$, $\langle \bar{2}^3 = \bar{8} \rangle = \{ \bar{8}, \bar{1} \}$; $\langle \bar{2}^2 = \bar{4} \rangle = \{ \bar{1}, \bar{4}, \bar{7} \}$, $\langle \bar{2} \rangle = U(\mathbb{Z}_9)$

$\longrightarrow$

Il diagramma di Hasse è

$$\begin{tikzcd}
 & \langle \bar{2} \rangle \text{ ordine } 6 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\text{ordine } 3 \ \langle \bar{2}^2 \rangle \arrow[dr, dash] & & \langle 2^3 \rangle \text{ ordine } 2 \arrow[dl, dash] \\
 & \langle \bar{1} \rangle \text{ ordine } 1 &
\end{tikzcd}$$

Esercizio 3. (6 punti)

L'applicazione $\phi : \mathbb{R} \to M_2(\mathbb{R})$ tale che

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}$$

è un omomorfismo di spazi vettoriali o di anelli? In caso affermativo, calcolarne nucleo $Ker\phi$ e immagine $Im(\phi)$.

$\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale rispetto alla somma $t_1 + t_2$ $(t_1, t_2 \in \mathbb{R})$, e prodotto per uno scalare $c \cdot t_1$ $(c \in \mathbb{R}, t_1 \in \mathbb{R})$

E' un anello se prendiamo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ oltre alla struttura $(\mathbb{R}, +)$ di gruppo abeliano, il prodotto usuale di $\mathbb{R}$: $t_1 \cdot t_2$ $(t_1, t_2 \in \mathbb{R})$

Calcoliamo: $\forall t_1, t_2, t, c \in \mathbb{R}$

$$\phi(t_1 \cdot t_2) \underset{\text{per definizione}}{=} \begin{bmatrix} t_1 + t_2 & 0 \\ 0 & t_1 + t_2 \end{bmatrix} \underset{\text{per come si sommano le matrici}}{=} \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_2 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix} = \phi(t_1) + \phi(t_2)$$

$$\phi(c \cdot t) = \begin{bmatrix} c t_1 & 0 \\ 0 & c t_2 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix} = c \cdot \phi(t)$$

$$\phi(t_1 t_2) = t_1 \cdot \phi(t_2) = \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_2 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix} = \phi(t_1) \cdot \phi(t_2)$$

(Si osservi che $\phi(t) = t \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = t \cdot I \ldots$)

Quindi ϕ è un morfismo sia di spazi vettoriali che di anelli -

Calcoliamo il nucleo

$$\operatorname{Ker}\phi = \left\{ t \in \mathbb{R} : \phi(t) = O_{M_2(\mathbb{R})} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$= \{0\}$, cioè è un morfismo iniettivo

$$\operatorname{Im}\phi = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \phi(t), \text{ per qualche } t \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

è l'insieme delle cosiddette matrici scalari.

Esercizio 4. (12 punti)

Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'operatore lineare definito, rispetto alla base canonica, dalla matrice:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 4 & 4 \\ -10 & 5 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Determinare gli autovalori di T e, se esiste, una base di autovettori di T.

Calcoliamo il polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -5-\lambda & 0 & 4 & 4 \\ -10 & 5-\lambda & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 8 \\ 0 & 0 & 2 & -3-\lambda \end{bmatrix}$$

se si esegue lo sviluppo di Laplace secondo la seconda colonna (con tre zeri) si trova subito

$$p_A(\lambda) = (5-\lambda)(-5-\lambda)\left[(3-\lambda)(-3-\lambda)-16\right] = (\lambda+5)^2(\lambda-5)^2$$

Il polinomio caratteristico si fattorizza in 4 fattori lineari; vi sono 2 autovalori, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -5$, entrambi di molteplicità algebrica 2: $m_a(5) = 2$

$m_a(-5) = 2$

Molteplicità geometrica di $\lambda_1 = 5 = \dim \operatorname{Ker}(A - 5I)$:

$$A - 5I = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 4 & 4 \\ -10 & 0 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ha rango 2 quindi ha nullità 2:

$\Rightarrow m_g(5) = 2$ base per $(A - 5I)X = \underline{0}$: $x_1 = 2x_4$, $x_3 = 4x_4$

$$\operatorname{Ker}(A - 5I) = \left\{ \begin{bmatrix} 2x_4 \\ x_2 \\ 4x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} : x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ \ldots \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \end{bmatrix}$ sono due autovettori indipendenti relativi ...

Molteplicità geometrica di $\lambda_2 = -5$: la matrice

$$A + 5I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 \\ -10 & 10 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S$$

ha rango 2 quindi nullità$(A+5I) = m_g(-5) = 2$.
Pertanto la matrice A è diagonalizzabile.
Una base di autovettori per l'autospazio $V(-5)$ si trova risolvendo il sistema $(A+5I)\underline{X} = \underline{0}$ equivalente a $S\underline{X} = \underline{0}$:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$V(-5) = \left\{ \begin{bmatrix} x_2 - x_4 \\ x_2 \\ -x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} : x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_2 v_3 + x_4 v_4 : x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

con $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $v_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ base di autovettori per $V(-5)$.

Pertanto nella base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ la matrice che rappresenta T sarà diagonale:

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

La matrice B del cambiamento di base è data da

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Si può verificare che $D = B^{-1}AB$, ovvero $BD = AB$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$