ALGEBRA

PRIMO ESONERO CANALE A-L
12 NOVEMBRE 2012

C. MALVENUTO

Istruzioni.

- Completare subito la parte inferiore di questa pagina con il proprio nome, cognome e firma.
- Scrivere solamente su questi fogli, anche dietro se occorre, a penna o a matita. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici.
- Tutte le risposte vanno **motivate**.
- **Non parlare** pena il ritiro immediato del compito.

ESERCIZIO	PUNTEGGIO
1	/ 9
2	/ 6
3	/ 6
4	/ 6
5	/ 3
TOTALE	/30

Nome e Cognome ↓	**Firma** ↓

Esercizio 1. (9 punti)

(a) Data la permutazione

$$\alpha = (4,5,6)(3,4,5)(2,3,4)(1,2,3)(7,8,9)(8,9,10)(10,11,12),$$

scrivere α come prodotto dei suoi cicli disgiunti e determinarne l'ordine.

(b) Detto $H =< \alpha >$ il sottogruppo ciclico generato da α, elencare tutti i suoi sottogruppi. Determinare almeno un generatore per ogni sottogruppo di H.

(c) Disegnare il diagramma di Hasse dell'ordine parziale $\leq$ tra i sottogruppi di H, dove per ogni S, T sottogruppo di H si definisce:

$$S \leq T \Leftrightarrow \text{S è sottogruppo di } T.$$

Esercizio 2. (6 punti) Dati i numeri $m = 426$ ed $n = 294$:

(a) trovare (m, n), il massimo comune divisore tra m ed n, mediante l'algoritmo di Euclide;

(b) Scrivere un'identità di Bézout per (m, n);

(c) dire se l'equazione diofantea $426x + 294y = 6$ ammette o no soluzioni intere $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$: in caso negativo motivare perché non ne ha, in caso affermativo trovarle.

Esercizio 3. (6 punti)

(a) Studiare il gruppo moltiplicativo U_{10} delle classi resto invertibili di $\mathbb{Z}_{10}$ (cioè determinarne la tavola moltiplicativa, l'ordine e l'inverso di ognuno dei suoi elementi, e tutti i suoi sottogruppi).

(b) (Facoltativo) A quale gruppo è isomorfo e perché?

Esercizio 4. (6 punti)

Sia $(A, +, \cdot)$ un anello, e sia c un suo fissato elemento. Si consideri il seguente sottoinsieme di A definito come:

$$S(c) = \{a \in A : \quad a \cdot c = c \cdot a\},$$

cioè l'insieme degli elementi di A che commutano con il fissato elemento c. Dire se l'insieme $S(c)$ è o no sottoanello di A.

Esercizio 5. (3 punti)

I *numeri di Fibonacci* F_k ($k = 1, 2, \ldots$) sono definiti ricorsivamente come segue: $F_1 := 1$, $F_2 := 1$ e, per $k \geq 3$, $F_k := F_{k-1} + F_{k-2}$. Ad esempio i primi sette numeri di Fibonacci sono 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13. Dimostrare per induzione la seguente affermazione:

$$\forall n \geq 1 : \quad F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}.$$