ALGEBRA
CANALE A-L

ESAME SECONDA PARTE

SECONDO ESONERO

27 GENNAIO 2012

C. MALVENUTO

Istruzioni.

- Completare subito la parte inferiore di questa pagina con il proprio nome, cognome e firma.
- Scrivere solamente su questi fogli, anche dietro se occorre, a penna o a matita. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici.
- Tutte le risposte vanno **motivate**.
- **Non parlare** pena il ritiro immediato del compito.

ESERCIZIO	PUNTEGGIO
1	/ 3
2	/ 7
3	/ 6
4	/ 14
5	/ 3
TOTALE	/33

Nome e Cognome ↓	**Firma ↓**

Esercizio 1. (3 punti)

Nel gruppo $(\mathbb{Z}_{15}, +)$ si verifichi che il sottoinsieme $H = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}\}$ è un sottogruppo e si scriva la partizione in classi laterali determinata da H.

Soluzione. Basta osservare che:
a) H contiene l'identità $\overline{0}$ di $\mathbb{Z}_{15}$;
b) contiene l'opposto di ogni suo elemento ($-\overline{0} = \overline{0}$, $-\overline{5} = \overline{10}$, $-\overline{10} = \overline{5}$);
c) è chiuso rispetto alla somma ($\overline{0} + \overline{0} = \overline{0}, \overline{0} + \overline{5} = \overline{5}, \overline{0} + \overline{10} = \overline{10}, \overline{5} + \overline{5} = \overline{10}, \overline{10} + \overline{10} = \overline{5}, \overline{5} + \overline{10} = \overline{0}$).

Alternativamente basta mostrare che il sottogruppo di $\mathbb{Z}_{15}$ generato da $\overline{5}$ coincide proprio con H:

$$< \overline{5} >= \{\overline{5}, 2 \cdot \overline{5} = \overline{10}, 3 \cdot \overline{5} = \overline{0}\}.$$

Una classe laterale (destra o sinistra, nel caso commutativo coincidono) si ottiene come $\overline{a} + H = \{\overline{a} + \overline{0}, \overline{a} + \overline{5}, \overline{a} + \overline{10}\}$. In ogni classe laterale vi sono 3 elementi, e in tutto vi sono 5 classi laterali distinte:

$\boxed{\overline{0} + H = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}\}}$

$\boxed{\overline{1} + H = \{\overline{1}, \overline{6}, \overline{11}\}}$

$\boxed{\overline{2} + H = \{\overline{2}, \overline{7}, \overline{12}\}}$

$\boxed{\overline{3} + H = \{\overline{3}, \overline{8}, \overline{13}\}}$

$\boxed{\overline{4} + H = \{\overline{4}, \overline{9}, \overline{14}\}}$

(Si ricordi, come è noto dalla teoria svolta, che:
$\overline{0} + H = \overline{5} + H = \overline{10} + H$;
$\overline{1} + H = \overline{6} + H = \overline{11} + H$
$\overline{2} + H = \overline{7} + H = \overline{12} + H$;
$\overline{3} + H = \overline{8} + H = \overline{13} + H$;
$\overline{4} + H = \overline{9} + H = \overline{14} + H$.)

Esercizio 2. (7 punti) Siano date le seguenti permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 1 & 8 & 5 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 7 & 6 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Si scriva ognuna di esse come prodotto di cicli disgiunti e come prodotto di trasposizioni.

(b) Si determinino per entrambe l'ordine, l'inversa, e la classe (pari o dispari).

(c) Calcolare i due prodotti $\sigma \circ \tau$ e $\tau \circ \sigma$.

(d) Stabilire se esistono nel gruppo simmetrico S_8 permutazioni di ordine 10. In caso affermativo esibirne una.

(e) (Facoltativo: bonus). Le permutazioni σ e τ sono tra loro coniugate? E le permutazioni $\sigma \circ \tau$ e $\tau \circ \sigma$ sono tra loro coniugate?

Soluzione.

$\sigma = (1,7,3)(2,4,8)(5)(6) = (1,3)(1,7)(2,8)(2,4)$: si tratta dunque di una permutazione di classe pari (si può scrivere come prodotto di un numero pari di trasposizioni); il suo ordine è il minimo comune multiplo dell'ordine dei suoi cicli (l'ordine di un ciclo è la lunghezza del ciclo), dunque $o(\sigma) = 3$; la permutazione inversa è il prodotto dell'inverso di ogni ciclo in ordine inverso: $\sigma^{-1} = (2,4,8)^{-1}(1,7,3)^{-1} = (2,8,4)(1,3,7) = (1,3,7)(2,8,4)$ (si ricordi che se i cicli sono disgiunti, essi commutano).

$\tau = (1,2)(3,5,6,8)(4,7) = (1,2)(3,8)(3,6)(3,5)(4,7)$: si tratta di una permutazione di classe dispari (l'abbiamo scritta come prodotto di 5 trasposizioni): il suo ordine è il minimo comune multiplo fra 2, 4 e 2, cioè $o(\tau) = 4$; la permutazione inversa è $\tau^{-1} = (1,2)(3,8,6,5)(4,7)$ (anche qui, abbiamo usato il fatto che i cicli essendo disgiunti commutano; inoltre l'inversa di una trasposizione (a,b) è la trasposizione stessa).

$\sigma \circ \tau = (1,7,3)(2,4,8)(1,2)(3,5,6,8)(4,7) = (1,4,3,5,6,2,7,8)$

$\tau \circ \sigma = (1,2)(3,5,6,8)(4,7)(1,7,3)(2,4,8) = (1,4,3,2,7,5,6,8)$

(Il prodotto si esegue da destra verso sinistra, come nel prodotto funzionale)

Una permutazione di S_n, quando espressa come prodotto di cicli disgiunti, ha ordine 10 se il minimo comune multiplo dell'ordine dei suoi cicli disgiunti è 10. Naturalmente in S_8 non ci sono cicli di lunghezza 10, ma possiamo ottenere 10 non solo come $10 \cdot 1$ ma anche come $2 \cdot 5$: se prendiamo un 2-ciclo e un 5-ciclo costruiti su insiemi disgiunti (quindi su $5 + 2 = 7 \leq 8$ elementi) otteniamo una permutazione di S_8 di ordine 10. Ad esempio possiamo prendere la permutazione $(1,2)(3,4,5,6,7)(8)$.

Due permutazioni sono coniugate se e solo se hanno la stessa struttura ciclica. Quindi σ e τ non sono coniugate: la prima è formata da due 3-cicli e due 1-cicli, cioe' una ha struttura ciclica $3, 3, 1, 1$, la seconda è formata da un 4-ciclo, due 2-cicli e un 1-ciclo, cioe' una ha struttura ciclica $4, 2, 2, 1$; invece $\sigma \circ \tau$ e $\tau \circ \sigma$ sono coniugate essendo entrambe formate da un 8-ciclo, cioè avendo la struttura ciclica 8. (La struttura ciclica di una permutazione di S_n è la partizione di n, ovvero una lista non decrescente di naturali la cui somma dà n, che si ottiene leggendo le lunghezze dei suoi cicli disgiunti.)

In effetti $\sigma \circ \tau$ e $\tau \circ \sigma$ sono coniugate per ogni σ, τ: basta osservare che $\tau\sigma = \sigma^{-1}(\sigma\tau)\sigma$.

Esercizio 3. (6 punti) Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

(a) Si scriva la matrice A che esprime f rispetto alla base canonica, assunta come base di partenza e d'arrivo dell'endomorfismo.

(b) Si provi che f è un isomorfismo (con un metodo a scelta).

(c) Si determini l'isomorfismo inverso f^{-1}.

(d) Si calcoli $f^{-1}(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix})$

Soluzione. La matrice A ha per colonne i vettori-colonna $f(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix})$, $f(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix})$, $f(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})$: dunque $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Vi sono molti modi per provare che f è un isomorfismo. Uno consiste nel verificare che la matrice associata ha determinante non nullo. Scambiando la seconda e terza riga si ottiene la matrice triangolare inferiore $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ il cui determinante si ottiene facendo il prodotto degli elementi sulla diagonale, cioè 1, allora $det(A) = -det(B) = -1$. (Oppure, si calcoli il determinante in qualunque altro modo: Sarrus, sviluppo secondo Laplace...).

Alternativamente, f è un isomorfismo se e solo se $Ker(A) = \{0\}$ se e solo se il sistema $AX = \underline{0}$ ammette unicamente la soluzione banale. Il sistema $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ si risolve immediatamente per sostituzione, arrivando all'unica soluzione $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$.

Alternativamente f è un isomorfismo se e solo se $Im(A) = \mathbb{R}^3$ se e solo se il rango di A è 3. Con pochi passaggi (fare) si riduce A a scala, trovando tre *pivot*.

Per trovare l'isomorfismo inverso si devono esprimere le relazioni inverse di quelle espresse dalla funzione f. Basta trovare la matrice inversa A^{-1}, tramite l'espressione con la matrice aggiunta, oppure aumentando la matrice A con la matrice identica I_3, e poi con le trasformazioni di Gauss-Jordan portare $[A|I_3]$ nella matrice $[I_3|C]$: C sarà la matrice inversa di A.

Si trova: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \to$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$ da cui si ha che $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Se ne deduce l'espressione esplicita

$$f^{-1}(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 + x_3 \\ x_2 - x_3 \end{bmatrix}.$$

Infine poichè $f^{-1}(X) = A^{-1}X$, allora

$$f^{-1}(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 4. (14 punti)

Dato $V = \mathbb{R}_2[t]$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ dei polinomi in una indeterminata t a coefficienti reali di grado al più 2, sia $f : V \to V$ l'endomorfismo di V definito ponendo:

$$f(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = (-a_0 - a_1) + (2a_o + 2a_1)t + (-2a_0 - a_1 + a_2)t^2.$$

(a) Si scriva la matrice A che esprime l'applicazione lineare f rispetto alla base canonica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ dello spazio V .

(b) Si dimostri (motivando la risposta) che f è diagonalizzabile, calcolando gli autovalori di A e la rispettiva molteplicità algebrica e geometrica.

(c) In caso affermativo, determinare una base $\mathcal{B} = (p_1(t), p_2(t), p_3(t))$ di autovettori per f e la matrice D che esprime f in questa base.

(d) Si determini una matrice non singolare C tale che $D = C^{-1}AC$.

Soluzione. Per la base canonica si ha $1 = 1 + 0t + ot^2$, $t = 0 + 1t + 0t^2$, $t^2 = 0 + 0t + 1t^2$. La matrice A ha per colonne i coefficienti rispettivamente di $f(1), f(t), f(t^2)$ nella base canonica: $f(1) = -1 + 2t - 2t^2$, i cui coefficienti costituiscono la prima colonna di A: $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$. Analogamente si trova $f(t) = -1 + 2t - t^2$ e $f(t^2) = +t^2$, da cui

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Per conoscere gli autovalori di A si calcoli il suo polinomio caratteristico $p(\lambda) = det(A - \lambda I) = det(\begin{bmatrix} -1-\lambda & -1 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix})$ che si trova facilmente con lo sviluppo di Laplace secondo la terza colonna:

$$p(\lambda) = (1-\lambda)det(\begin{bmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 2 & 2-\lambda \end{bmatrix}) = (1-\lambda)[(-1-\lambda)(2-\lambda) + 2] =$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda) = \lambda(1-\lambda)^2.$$

Dunque il polinomio caratteristico ha tutte le sue radici λ_1, λ_2 in $\mathbb{R}$,

$$Spec(A) = \{0, 1\},$$

con $\lambda_1 = 1$ di molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = 0$ di molteplicità algebrica 1. Si deve ora calcolare la molteplicità geometrica $m_g(\lambda_i) = dimKer(A - \lambda_i)$, per $i = 1, 2$. Per l'autovalore 1 si ottiene la matrice: $A - I = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ in cui la seconda e terza colonna sono multiple della prima, pertanto il suo rango è 1. Ricordando il teorema 'rango + nullità' si ha che

$$dim\mathbb{R}^3 = rg(A - I) + dim(Ker(A - I)),$$

da cui si deduce che $m_g(1) = dimKer(A - \lambda_i I) = 3 - 1 = 2 = m_a(1)$, dove $m_a(\lambda)$ denota la molteplicità algebrica di un autovalore λ. Per quanto riguarda la molteplicità geometrica dell'autovalore 0, si ricordi che vale sempre $1 \leq m_g(\lambda_0) \leq m_a(\lambda_0)$ per ogni autovalore λ_0, e dunque in questo caso si ha $1 \leq m_g(\lambda_0) \leq m_a(\lambda_0) = 1$, quindi $m_g(\lambda_0) = 1$.

Dal fatto che

- per ogni autovalore λ_0 di A si ha $m_g(\lambda_0) = m_a(\lambda_0)$ e
- $\displaystyle\sum_{\lambda_0 \in Spec(A)} m_g(\lambda_0) = dimV = dim\mathbb{R}^3 = 3$,

possiamo affermare che A è diagonalizzabile. Infatti è possibile trovare in ogni autospazio $V_{\lambda_i} = Ker(A - \lambda_i I)$ relativo agli autovalori $\lambda_i, i = 1, 2$ una base di autovettori: facendone l'unione, otterremo una base di autovettori per $\mathbb{R}^3$.

Calcolo di una base di $V_1 = Ker(A - I)$: si deve risolvere il sistema lineare omogeneo $(A - I)X = 0$ che in questo caso si riduce evidentemente alla sola equazione $2x_1 + x_2 = 0$: scegliendo come variabili libere x_2, x_3, si ha $V_1 = \{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_1 = -1/2x_2\} = \{\begin{bmatrix} -1/2x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} = \{x_2 \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} =< v_1, v_2 >$ dove $v_1 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sono una base di autovettori per V_1.

Calcolo di una base di $V_0 = Ker(A - 0 \cdot I) = KerA$: si deve risolvere il sistema lineare omogeneo $AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$. Con una semplice riduzione a scala scegliendo come variabile libera x_3,(o risolvendolo direttamente) tutte e sole le soluzioni di tale sistema sono della forma si ha

$V_1 = \{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_1 = x_3; x_2 = -x_3\} = \{ \begin{bmatrix} x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_3 \in \mathbb{R}\} = \{x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} :$
$x_3 \in \mathbb{R}\} =< v_3 >$ dove $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ è una base di autovettori per V_0.

In sintesi, la base di autovettori cercata è $\mathcal{B} = \{ \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$,
ovvero, usando le coordinate dei vettori come coefficienti dei polinomi,

$$\mathcal{B} = \{p_1(t) = -1/2 + t, p_2(t) = t^2, p_3(t) = 1 - t + t^2\}.$$

Infine, nella base $\mathcal{B}$ l'applicazione lineare ha matrice diagonale

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

mentre la matrice C 'diagonalizzante' del cambiamento dalla base canonica alla base $\mathcal{B}$ si ottiene giustapponendo le tre colonne dei vettori v_1, v_2, v_3:

$$C = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 5. (3 punti)

Sia $V = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettorariale delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali. Stabilire se il sottoinsieme W di V definito da

$$W = \{A \in V : a_{11}a_{22} = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale di V oppure no.

Soluzione. Gli elementi di W sono matrici quadrate $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ in cui almeno uno degli elementi della diagonale siano nulli (uno dei due, oppure entrambi). Se si sommano due matrici A e B di W in cui nella prima solo $a_{11} = 0$ ma $a_{22} \neq 0$, e nella seconda si ha $b_{11} \neq 0$ ma $b_{22} = 0$ si ottiene una matrice in cui sulla diagonale ci sono elementi entrambi non nulli, pertanto la condizione di appartenenza a W non è verificata: ad esempio:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \notin W.$$

Pertanto W non è un sottospazio, perché non è chiuso rispetto alla somma di vettori.