ALGEBRA

PRIMO ESONERO CANALE A-L
18 NOVEMBRE 2011

C. MALVENUTO

Istruzioni.

- Completare subito la parte inferiore di questa pagina con il proprio nome, cognome e firma.
- Scrivere solamente su questi fogli, anche dietro se occorre, a penna o a matita. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici.
- Tutte le risposte vanno **motivate**.
- **Non parlare** pena il ritiro immediato del compito.

ESERCIZIO	PUNTEGGIO
1	/ 8
2	/ 6
3	/ 2
4	/ 3
5	/ 8
6	/ 3
TOTALE	/30

Nome e Cognome ↓	**Firma** ↓

Esercizio 1. (8 punti) Sia $\mathcal{H}$ la famiglia di tutti i sottogruppi del gruppo additivo $\mathbb{Z}_{20}$ delle classi resto modulo 20.

(a) Elencare tutti gli elementi di $\mathcal{H}$. Determinare almeno un generatore per ogni sottogruppo $S \in \mathcal{H}$.

(b) Disegnare il diagramma di Hasse dell'ordine parziale $(\mathcal{H}, \leq)$ dove per ogni $S, T \in \mathcal{H}$ si definisce:

$$S \leq T \Leftrightarrow \text{S è sottogruppo di } T.$$

Esercizio 2. (6 punti) Dati i numeri $m = 375$ ed $n = 123$:

(a) trovare (m, n) il massimo comune divisore tra m ed n mediante l'algoritmo di Euclide;

(b) Scrivere un'identità di Bézout per (m, n);

(c) dire se l'equazione diofantea $375x + 123y = 6$ ammette o no soluzioni intere $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$: in caso negativo motivare perché non ne ha, in caso affermativo trovarle.

Esercizio 3. (2 punti) Determinare le soluzioni dell'equazione congruenziale

$$4x \equiv 3 \pmod{385}.$$

Scrivere l'insieme delle soluzioni come elemento di $\mathbb{Z}_{385}$ (anello delle classi resto modulo 385), scegliendo opportunamente il rappresentante tra 0 e 384, ed eseguire la verifica.

Esercizio 4. (3 punti)

(a) Studiare il gruppo moltiplicativo $U(\mathbb{Z}_{10})$ degli invertibili di $\mathbb{Z}_{10}$.

(b) (Facoltativo) A quale gruppo è isomorfo e perché?

Esercizio 5. (8 punti)

(a) Sia $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita da

$$f_{a,b}(x) = ax + b;$$

detto $G = \{f_{a,b} : a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ l'insieme delle applicazioni $f_{a,b}$ con $a \neq 0$, si dimostri che $(G, \circ)$ è un gruppo non abeliano rispetto alla composizione funzionale, determinando esplicitamente come elementi di G il suo elemento neutro, l'inverso di $f_{a,b}$ e il prodotto $f_{a,b} \circ f_{c,d}$.

(b) Dire se l'insieme $H = \{f_{1,t} : t \in \mathbb{R}\} \subseteq G$ è o no sottogruppo di G.

Esercizio 6. (3 punti) Si dimostri la seguente identità che involve i coefficienti binomiali, vera per ogni n, k naturali, senza usare la formula del coefficiente binomiale ma in modo combinatorio:

$$\binom{n}{2} = \binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} + k(n-k).$$

(Suggerimento: contare in due modi diversi il numero totale di coppie non ordinate di un insieme ad n elementi).