Algebra

Claudia Malvenuto
Canale A-L
Scheda esercizi n. 12

15 dicembre 2011

Per tutta la bellezza
mai io mi perderò,
ma per un non so che
che si ottiene per caso.
(Juan De La Cruz)

1. Dire in quali casi l'insieme S è uno spazio vettoriale dello spazio V:

   (a) $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad S = \{\text{matrici con traccia uguale a } 1\}$.

   (b) $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad S = \{\text{matrici con la seconda colonna nulla}\}$.

   (c) $V = \mathbb{R}_2[t], \quad S = \{\text{polinomi } p(t) \text{ tali che } p(-1) = 0\}$.

   (d) $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad S = \{\text{matrici } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ tali che } a_{11} \cdot a_{21} = 0\}$.

   (e) $V = \mathbb{R}^4, \quad S = \{\text{vettori } (x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ tali che } x_1 - x_2 = 0\}$.

   item Dati i seguenti insiemi di vettori, si dica in ciascun caso, motivando la risposta, se essi sono :

   - linearmente indipendenti
   - generatori di V
   - una base di V.

   (a) $V = \mathbb{R}^4, \qquad T = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \};$

   (b) $V = \{ \text{ matrici simmetriche reali } 2\times 2\}, \quad T = \{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \};$

(c) $V = \mathbb{R}_2[t]$ (i polinomi di grado al più 2 a coefficienti reali), $T = \{1+t, 1-t, t^2, 1-t^2\}$.

2. (a) Si determini una base per il sottospazio S di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $v_1 = (1,1,0,1)^t$, $v_2 = (1,0,1,1)^t$, $v_3 = (1,-1,1,-1)^t$, $v_4 = (2,2,1,4)^t$.

   (b) Si dica se il vettore $v = (0,3,-2,2)^t$ appartiene al sottospazio S.

   (c) Si dica (motivando la risposta) se i vettori $\{v_1, v_2, v_3, v\}$ formano una base di $\mathbb{R}^4$.

   (d) Dopo aver verificato che l'insieme $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$, si determinino le coordinate del vettore v nella base $\mathcal{B}$.

3. Si dica (motivando le risposte) se i vettori dell'insieme T sono:

   - linearmente indipendenti
   - generatori di V
   - una base di V

   nei seguenti casi:

   (a) $V = \mathbb{R}^4, \qquad T = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \};$

   (b) $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \qquad T = \{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \};$

   (c) $V = \mathbb{R}_2[t]$ (i polinomi di grado al più 2 a coefficienti reali), $T = \{1-t+t^2, 2+t-t^2, 1-4t+4t^2\}$.

4. (a) Si dica, argomentando la risposta, se i vettori $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ sono dei generatori di $\mathbb{R}^3$.

(b) Si trovi una base per lo spazio delle soluzioni S del sistema omogeneo:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

(c) Si estenda la base trovata per il sottospazio S a una base di $\mathbb{R}^4$.

5. Sia S il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

   (a) Si trovi una base di S.

   (b) Si estenda la base di S a una base di $\mathbb{R}^4$.

   (c) Dato

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \right\}$$

   (d) Si trovi una base per $S \cap T$.

   (e) Si trovi una base per $S + T$.

6. Sia $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) Si trovi una base per lo spazio S generato dalle righe di A.

   (b) Si trovi una base per il sottospazio $T = \left\{ X \in \mathbb{R}^4 : AX = \underline{0} \right\}$.

7. Siano dati i polinomi $p_1(t) = 2 + t + 2t^2, p_2 = 1 + t + t^2, p_3 = 2 - t + 2t^2$ di $\mathbb{R}_2[t]$.

   (a) Si trovi una base per $S =< p_1(t), p_2(t), p_3(t) >$, il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_2[t]$ generato dai tre polinomi.

   (b) Si dica (argomentando la risposta) se i tre polinomi $p_1(t), p_2(t), p_3(t)$ sono linearmente indipendenti.

8. Si determini una base per il sottospazio $S = < \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} >$ di $\mathbb{R}^4$.

9. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche di ordine 2. Dopo aver verificato che l'insieme $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \right\}$ è una base di V, si determino le coordinare del vettore $v = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

10. Si verifichi, argomentando la risposta, che il seguente insieme di polinomi $\mathcal{B} = \{1+t, t+t^2, 1+t+t^2\}$ è una base di $V = \mathbb{R}_2[t]$, e si trovino, nella base $\mathcal{B}$, le coordinare del vettore $p(t) = t$.