Algebra

Claudia Malvenuto
Canale A-L
Scheda esercizi n. 10

23 novembre 2011

Les secrets les mieux gardés
sont ceux qui jamais n'ont été demandés.[1]
(Jacques Prévert, da 'Adonides')

1. Sia $\varphi(n)$ il numero di interi compresi fra 1 ed n che sono coprimi con n (si tratta della *funzione φ di Eulero*). Si dimostri che se p è un numero primo, allora $\varphi(p^h) = p^h - p^{h-1}$.

2. Si ricorda che se $(r, s) = 1$ allora $\varphi(rs) = \varphi(r)\varphi(s)$ (φ è moltiplicativa.) Scrivere un'espressione per $\varphi(n)$ che dipenda dalla fattorizzazione in primi di n.

3. È vero che $\varphi(n)$ è pari, per ogni $n \geq 3$? Se è vero dimostrarlo, se e' falso fornire un controesempio.

4. Trovare un isomorfismo esplicito tra il gruppo delle simmetrie del triangolo equilatero D_3 e il gruppo simmetrico su 3 elementi S_3.

5. Trovare un isomorfismo esplicito tra il gruppo di Klein e il gruppo moltiplicativo $U_8 = U(\mathbb{Z}_8)$ degli invertibili delle classi resto modulo 8.

6. Fornire un esempio di gruppo non ciclico in cui tutti i sottogruppi non banali siano ciclici.

7. Sia τ una fissata permutazione di S_n. Sia $f : S_n \to S_n$ l'applicazione così definita: $f(\sigma) = \tau\sigma\tau^{-1}, \forall\sigma \in S_n$. Verificare che f è un automorfismo di S_n [è detto automorfismo di coniugio (relativo a τ)].

[1] I segreti meglio mantenuti sono quelli sui quali nessuno ha mai fatto domande.

8. Sia $n \geq 2$ e sia $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ l'applicazione così definita: $\pi(a) = \overline{a}, \forall a \in \mathbb{Z}$. Verificare che π è un omomorfismo di anelli e determinare il nucleo $\mathrm{Ker}(\pi)$. L'omomorfismo π è detto proiezione canonica di $\mathbb{Z}$ sull'anello quoziente $\mathbb{Z}_n$.

9. L'applicazione $\phi : \mathbb{R} \to M_2(\mathbb{R})$ tale che

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}, \forall t \in \mathbb{R},$$

   è un omomorfismo di spazi vettoriali o di anelli? In caso affermativo, calcolarne nucleo e immagine.

10. Sia $\partial : K[X] \to K[X]$ l'applicazione di derivazione, così definita: per ogni polinomio $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$

$$\partial(P) = a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2 + \ldots + na_nX^{n1}$$

    [se $K = \mathbb{R}$, $\partial(P)$ è l'usuale derivata prima del polinomio P].

    (a) Verificare che ∂ è un omomorfismo di K-spazi vettoriali ma non un omomorfismo di anelli.
    (b) Posto $K = \mathbb{R}$, calcolare $\mathrm{Im}\partial$.
    (c) Posto $K = \mathbb{R}$, calcolare $\mathrm{Ker}\partial$.

11. Considerato il gruppo additivo dei razionali, $(Q, +)$, si determini il minimo sottogruppo H contenente il sottoinsieme $\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\}$; dimostrare che esiste un numero razionale $\frac{m}{n}$ tale che H risulti essere il minimo sottogruppo contenente $\frac{m}{n}$.

12. Nel gruppo $G = (U_{21},)$ si consideri il sottogruppo minimo S contenente l'elemento $\overline{4}$; si determini la partizione in classi laterali destre di S in G e si verifichi che essa coincide con la partizione in classi laterali sinistre. Ripetere lesercizio per altri sottogruppi di G.

13. Verificare quali fra i seguenti gruppi sono fra loro isomorfi: $(U_{15},)$, $(\mathbb{Z}_4, +)$, $(U_8,)$, $(\mathbb{Z}_8, +)$, $(U_{12},)$, $(< \rho >, \circ)$, dove ρ è una rotazione nel piano di centro un punto fissato e angolo $\phi = \frac{\pi}{4}$. Scrivere un isomorfismo nei casi possibili.

14. Verificare quali fra i seguenti gruppi sono ciclici: $(U_{36},)$, $(\mathbb{Z}_{209}, +)$, $(U_{25},)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(Q^*,)$ Per i gruppi finiti scrivere tutti i possibili sottogruppi.

15. Si considerino i seguenti due gruppi $H = U_{12}$ e $K = S_3$; per tali gruppi siano $\alpha : H \to H$ l'applicazione definita da $\alpha(x) = x^2$ e $\beta : K \to K$ l'applicazione definita da $\beta(x) = x^2$ Si dimostri che α è un omomorfismo e si verifichi con un controesempio che β non è un omomorfismo.

16. Nel gruppo simmetrico S_8 si considerino le seguenti permutazioni:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 3 & 1 & 5 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$\tau = \tau_1\tau_2\tau_3\tau_4$, dove

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 1 & 8 & 3 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \tau_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 8 & 5 & 7 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 6 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \tau_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 7 & 1 & 8 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare la decomposizione in cicli disgiunti e l'ordine delle permutazioni σ e τ.

(b) Per ciascuna delle precedenti permutazioni determinare la parità e scrivere almeno una decomposizione in trasposizioni (scambi).

(c) Determinare ρ tale che $\tau\rho = \sigma^2$.

(d) Calcolare ρ^{125}.

17. Nel gruppo simmetrico $(S_{18}, \circ)$ si verifichi se esistono sottogruppi isomorfi ai seguenti gruppi: $(\mathbb{Z}_{84}, +)$, $(\mathbb{Z}_{168}, +)$, $(\mathbb{Z}_{81}, +)$, $(U_8,)$, $(S_{15}, \circ)$, $(A_{21}, \circ)$, $(A_3, \circ)$.

18. Verificare che l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & (\mathbb{C}, +) & \to & (\mathbb{R}, +) \\ & a + ib & \mapsto & a \end{array}$$

è un omomorfismo di gruppi. Determinarne il nucleo $\mathrm{Ker}(\alpha)$ e la partizione in classi laterali di $\mathrm{Ker}(\alpha)$ in $\mathbb{C}$.

19. Verificare che l'applicazione:

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & (\mathbb{Z}, +) & \to & (S_4, \circ) \\ & n & \mapsto & (1342)^n \end{array}$$

è un omomorfismo di gruppi. Determinarne il nucleo $\mathrm{Ker}(\gamma)$, l'immagine $\mathrm{Im}(\gamma)$ e la partizione in classi laterali di $\mathrm{K}er(\gamma)$ in $\mathbb{Z}$.

20. Scrivere esplicitamente i laterali destri di H in G nei casi seguenti:
    (a) G gruppo ciclico di ordine 10 generato da g, $H =< g^2 >$.
    (b) G gruppo ciclico di ordine 10 generato da g, $H =< g^5 >$.
    (c) $G = S_4$, $H = \{\pi \in S_4 | \pi(1) = 1\}$.
21. Si provi che S_{15} ha almeno un sottogruppo di ordine $13, 26, 35$.
22. Qual è il massimo ordine che può avere un elemento di S_{10}?
23. Quale delle seguenti applicazioni tra gruppi sono omomorfismi?
    (a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad f(x) = x + 1$.
    (b) $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R},), \quad f(x) = e^{3x}$.
    (c) $f : S_5 \to S_5, \quad f(\sigma) = g \circ \sigma$, dove g è la permutazione che scambia 1 e 3.
    (d) $f : G \to G, \; f(x) = axa^{-1}$, dove a è un fissato elemento di G.
24. Provare che $f : G \to G, \;\; f(g) = g^{-1}$ è un omomorfismo se e solo se G è abeliano.
25. Provare che l'insieme $Z(G) = \{g \in G | gx = xg \;\; \forall x \in G\}$ degli elementi di G che commutano con tutto G, detto *centro del gruppo* G, è un sottogruppo normale di G. Chi è $Z(G)$ se G è abeliano? [La lettera Z per denotare il centro viene dall'iniziale del tedesco *Zentrum*.]
26. Provare che l'isomorfismo tra gruppi è una relazione di equivalenza.
27. (a) Dimostrare che se $\varphi : G \to G$ è un omomorfismo, e $g \in G$ ha ordine finito, allora $o(\varphi(g))$ divide $o(g)$.
    (b) Dimostrare che se $\varphi : G \to G$ è un isomorfismo e $g \in G$ ha ordine finito, allora $o(g) = o(\varphi(g))$.
    (c) Determinare tutti gli isomorfismi tra due gruppi ciclici dello stesso ordine.
28. Calcolare il numero di omomorfismi iniettivi o suriettivi da:
    (a) $\mathbb{Z}_{12}$ a $\mathbb{Z}_5$
    (b) $\mathbb{Z}_{12}$ a $\mathbb{Z}_6$
    (c) $\mathbb{Z}_{12}$ a $\mathbb{Z}_{12}$

29. Per $a, b \in \mathbb{R}$ definiamo $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tramite

$$f_{a,b}(x) = ax + b;$$

detto $G = \{f_{a,b} : a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ l'insieme delle applicazioni $f_{a,b}$ con $a \neq 0$, si dimostri che $(G, \circ)$ è un gruppo non abeliano rispetto alla composizione funzionale. Provare inoltre che l'insieme

$$H = \{f_{1,t} : t \in \mathbb{R}\} \subseteq G$$

è un sottogruppo normale di G e determinare in quoziente G/H.

30. Nel gruppo additivo $(\mathbb{R}^2, +)$ si consideri il sottogruppo

$$H = \{(x, 5x) | x \in \mathbb{R}\}.$$

Si studi il quoziente G/H, determinando geometricamente i suoi elementi; si provi poi che G/H è isomorfo a $(\mathbb{R}, +)$.

31. Provare che

$$\mathbb{Z}_{12}/ < \overline{4} > \cong \mathbb{Z}_4 \qquad \mathbb{Z}_{18}/ < \overline{3} > \cong \mathbb{Z}_3$$

32. Dimostrare che l'insieme G delle riflessioni di un piano cartesiano rispetto agli assi e all'origine è un gruppo rispetto alla composizione di trasformazioni, isomorfo al gruppo di Klein.

33. Sia G un gruppo, e siano H, K due sottogruppi di G tali che l'ordine di H è primo con l'ordine di K. Dimostrare che $H \cap K = \{e\}$, dove e è l'elemento neutro di G.

34. Dimostrare che, se H è un sottogruppo di G, allora l'unica classe laterale sinistra (destra) di H in G che sia un sottogruppo è H stesso.

35. Dimostrare che se H e K sono sottogruppi di un gruppo G, una classe laterale di $H \cap K$ è l'intersezione di una classe laterale di H con una classe laterale di K.

36. Sia G un gruppo abeliano finito e siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i suoi elementi. Dimostrare che $x = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ è un elemento tale che $x^2 = e$, dove e è l'elemento neutro di G.