Algebra

Claudia Malvenuto
Canale A-L
Scheda esercizi n. 8

11 novembre 2011

Not easy to state the change you made.
(Sylvia Plath, 'Love letter')

1. Sia $\sigma = (1324)(56) \in S_6$. Determinare il minimo intero $k \geq 1$ tale che $\sigma^k = id$.
2. Sia $\sigma = (132)(45) \in S_5$. Determinare il minimo intero $k \geq 1$ tale che $\sigma^k = id$.
3. Scrivere ogni permutazione di S_3 come prodotto di trasposizioni, suddividere le permutazioni di S_3 in pari e dispari. Ripetere l'esercizio con le 24 permutazioni di S_4.
4. Scrivere tutte le permutazioni di S_5 che contengono il ciclo (12).
5. Assegnate le permutazioni $\sigma_1 = (1342)$, $\sigma_2 = (25)(34) \in S_5$, determinare la permutazione $\tau \in S_5$ tale che $\sigma_2 = \tau\sigma^{-1}$.
6. Scrivere la tavola pitagorica di S_3, cioè la tavola 6×6 formata da tutti i prodotti $\sigma\tau$, al variare di $\sigma, \tau \in S_3$.
7. (a) Verificare se $\sigma \in S_n$ è una permutazione di classe dispari, non esiste alcuna permutazione $\alpha \in S_n$ tale che $\alpha^2 = \sigma$.
   (b) Determinare $\alpha \in S_6$ tale che $\alpha^2 = (123)(456)$.
   (c) Spiegare perché non esiste $\alpha \in S_6$ tale che $\alpha^2 = (12)(3456)$.
8. Determinare per quali $\sigma \in S_4$ l'equazione $X^2 = \sigma$ è risolubile.

9. In S_5 sono assegnati un 3-ciclo σ e un 2-ciclo τ, disgiunti tra loro. Sia H l'insieme formato dalle permutazioni di S_5 ottenibili come prodotti finiti di σ e τ. Determinare le permutazioni di H e verificare se H è un sottogruppo di S_5.

10. (a) Quanti sono i 3-cicli di S_6?

    (b) Quante sono le permutazioni di S_6che sono prodotto di due 3-cicli disgiunti?

11. Per ognuna delle seguenti permutazioni, si determinino le inverse, il periodo, la classe (pari o dispari) e si scrivano come prodotto di cicli disgiunti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 3 & 2 & 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 6 & 2 & 8 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 3 & 2 & 4 & 7 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

12. Si dica se il seguente sottoinsieme Sdi S_4 è un sottogruppo:

$$S = \{id, (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 3), (1\ 2), (3\ 4), (2\ 3), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 2)(3\ 4),$$
$$(1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3\ 2\ 4), (2\ 1\ 3\ 4), (2\ 1\ 4\ 3)\}.$$

13. In S_4 si determini il sottogruppo generato dal sottoinsieme $X = \{(1\,2\,3), (1\,4)\}$.

14. Dimostrare che il sottoinsieme costituito dalle permutazioni di classe pari forma un sottogruppo. E il sottoinsieme costituito dalle permutazioni di classi dispari?

15. Quante sono le strutture cicliche delle permutazioni di S_{14} con periodo 20? Quali tra queste sono pari e quali dispari? Il sottoinsieme delle permutazioni di S_{14} con periodo 20 costituiscono un sottogruppo di S_{14}?

16. Si provi che S_{30} possiede un sottogruppo di ordine 209.

17. Si provi che il sottogruppo alterno A_n delle permutazioni pari è generato dai 3-cicli.

18. Trovare la classe delle seguenti permutazioni:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 2 & 3 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 7 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix},$$

19. Siano $\sigma = (1\ 5\ 2\ 6)(3\ 4\ 7)$ e $\tau = (1\ 5)(2\ 3\ 7\ 6)$ due permutazioni su 7 elementi. Trovare la classe di $\tau \circ \sigma^{-1}$.

20. Dimostrare che il numero di permutazioni di classe pari è uguale al numero di permutazioni di classe dispari.

21. Quante sono le permutazioni di classe pari su 4 elementi?