Algebra

Claudia Malvenuto
Canale A-L
Scheda esercizi n. 8

8 novembre 2011

Seen
through a telescope:
ten cents worth of fog.
(Kobayashi Issa, 'Seen')

1. Si dimostri che un gruppo non abeliano non può mai essere ciclico.

2. Dimostrare che se un gruppo è finito, allora ogni elemento ha periodo finito.

3. Elencare tutti gli elementi di S_4, per ogni elemento $\sigma \in S_4$ scrivere l'inverso σ^{-1}. Calcolare per ogni permutazione σ la permutazione $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$, con $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, coniugata di σ secondo τ.

4. Determinare tutti i sottogruppi del gruppo simmetrico S_3 delle permutazioni su tre elementi del tipo $< \sigma >$ al variare di $\sigma \in S_3$.

5. In $GL_2(\mathbb{R})$, il gruppo lineare reale delle matrici reali 2×2 invertibili, determinare l'ordine della matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e il sottogruppo generato da M.

6. Sia G l'insieme delle matrici reali $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $x \in \mathbb{R}$. Calcolare qual è l'inverso di $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, il prodotto $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e dimostrare che G è un sottogruppo di $GL_2(\mathbb{R})$ (rispetto al prodotto righe per colonne). A quale gruppo è isomorfo G?

7. Se H e K sono sottogruppi di G, dimostrare che $H \cap K$ è un sottogruppo di G. (La dimostrazione si applica ugualmente al caso dell'intersezione di un numero qualunque, finito o infinito, di sottogruppi.)

8. Se H e K sono sottogruppi di G, dimostrare che $H \cup K$ è un sottogruppo di G se e solo se $H \subseteq K$ oppure $K \subseteq K$.

9. Dimostrare che se un elemento g di un gruppo G è tale che $g^n = e$, allora n è un multiplo del periodo (detto anche ordine) di g.

10. Provare che se $(a, n) = d$ allora $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n$ ha ordine n/d (in $\mathbb{Z}_n$ come gruppo additivo).

11. Si determinino in $\mathbb{Z}_{10000}$ tutti gli elementi di ordine 4 e 8.

12. Nel gruppo ciclico $C_{15} =< x|x^{15} = 1 >$ determinare il periodo dell'elemento x^{320}. Indicare tutti i generatori del sottogruppo $< x^{320} >$.

13. Determinare il diagramma di Hasse dell'ordine parziale $S \leq T$ (S è sottogruppo di T) tra i sottogruppi del gruppo additivo $\mathbb{Z}_{20}$ delle classi resto modulo 20.

14. Studiare il gruppo moltiplicativo $U(\mathbb{Z}_{20})$ degli invertibili di $\mathbb{Z}_{20}$.

15. Determinare i sottogruppi ciclici di S_4, il gruppo delle permutazioni su 4 elementi.

16. Verificare che $U(\mathbb{Z}_9)$ è un gruppo ciclico e determinarne tutti i generatori.

17. Verificare che un gruppo di ordine 4 non possiede elementi di periodo 3. Dedurne che un gruppo di ordine 4 o è ciclico o è un gruppo di Klein (cioè che, a meno di isomorfismi, esistono due soli gruppi di ordine 4: il gruppo ciclico C_4 e V).

18. Sia G un gruppo di ordine 6.
    (a) Verificare che G non può possedere cinque elementi di periodo 2.
    (b) Verificare che G non può possedere tre elementi di periodo 3.

19. (a) Sia G un gruppo abeliano. Verificare che l'insieme H degli elementi di periodo finito di G è un sottogruppo di G.

(b) Se invece G non è abeliano, H può non essere un sottogruppo di G. Per dimostrare tale affermazione si utilizzino i seguenti dati: $G = GL_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in G$. Verificare che $A, {}^t(A) \in H$ mentre il prodotto $A \cdot {}^t(A) \notin H$.

20. Sono assegnati due simboli x, y, legati soltanto dalle seguenti tre relazioni (moltiplicative):

$$x^4 = 1, y^2 = 1, yx = x^3 y.$$

Verificare che gli elementi generati da tali simboli sono otto e scriverne la tavola moltiplicativa. Verificare che formano un gruppo (che è chiamato gruppo diedrale di ordine 8).