Esercizio 1 a) Costruire il reticolo dei sottogruppi del gruppo $(\mathbb{U}_{15}, \cdot)$ degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{15}$.

b) Verificato che tale gruppo possiede tre sottogruppi di ordine 2, costruire i tre quozienti relativi a tali sottogruppi e verificare se sono tra loro o meno isomorfi. In caso affermativo descrivere esplicitamente un isomorfismo.

Esercizio 2 a) Verificare che l'insieme G delle matrici 2×2 a coefficienti interi e aventi determinante 1 è un gruppo rispetto al prodotto righe per colonne.
b) Per $n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$ si consideri l'insieme di matrici

$$\Gamma_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G \mid \overline{a} = \overline{d} = \overline{1},\, \overline{b} = \overline{c} = \overline{0} \right\}.$$

(ove $\overline{x}$ denota la classe resto di x modulo n). Verificare che Γ_n è un sottogruppo di G.

Esercizio 3 Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi reali di grado minore o uguale a 4. Sia W lo spazio generato dai polinomi

$$p_1 = t + 2t^3 + t^4,\ p_2 = 2t + 4t^3 + 2t^4,\ p_3 = 1 + t^2,\ p_4 = t^2.$$

a) Si verifichi che $dim(W) = 3$. Si estragga da $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ una base $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ di W.
b) Completare B a una base di V.
c) Sia $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e $F : W \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$F(b_1 + b_2) = 2e_1 + 4e_2 - 2e_3,\ F(b_1 - b_2) = -2e_4,\ F(b_3) = e_1 + 2e_2 - e_3 - e_4.$$

Determinare $F^{-1}(e_2 + e_3)$.

Esercizio 4 Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dire se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso affermativo determinare N.