Esercizio 1 (a) Sia G un gruppo con elemento neutro u e sia $a \neq u$ un fissato elemento di G. Dimostrare che l'applicazione $L_a : G \to G$, $L_a(g) = ag$ è biunivoca ma non è un omomorfismo.

(b) Determinare l'ordine massimo di una permutazione di S_8.

(c) Dimostrare che due permutazioni coniugate hanno la stessa parità.

Esercizio 2 (a) Determinare il gruppo moltiplicativo $\mathbb{U}_{25}$ degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{25}$. (b) Dimostrare che $\mathbb{U}_{25}$ è ciclico. Costruire il reticolo dei sottogruppi.

Esercizio 3 Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi reali di grado minore o uguale a 3, e W lo spazio delle matrici reali simmetriche 2×2. Si consideri l'applicazione lineare $F : V \to W$ definita da

$$F(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 + a_2 & a_0 + a_1 + a_2 \\ a_0 + a_1 + a_2 & a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare basi per l'immagine e il nucleo di F.

(b) Calcolare le coordinate di $F(1+t)$ rispetto alla base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Esercizio 4 Si consideri l'operatore lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L_A(X) = AX$, ove

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Dire se L_A è diagonalizzabile.

(b) Dire se A è simile alla matrice $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.