**Esercizio 1** (a) Si costruiscano tutti i sottogruppi dei seguenti gruppi:

$$(\mathbb{Z}_{143}, +), \quad (\mathbb{Z}_{36}, +), \quad (\mathbb{Z}_{30}, +)$$

(b) Costruire, per ciascuno dei gruppi precedenti, un diagramma che espliciti le relazioni di inclusione tra i sottogruppi (precisamente, un grafo avente per vertici i sottogruppi e un lato tra i sottogruppi $Z, T$ se $Z \subset T$ e non esiste un sottogruppo $R$ tale che $Z \subset R \subset T$).
(c) Verificare che l'applicazione $f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_9$ ottenuta ponendo $f(\overline{n}) = \overline{6n}$ è ben definita ed è un omomorfismo di gruppi. Determinarne poi il nucleo.

**Esercizio 2** Determinare

$$G = \left\{ A = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix} \mid \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d} \in \mathbb{Z}_2, \det(A) \neq 0 \right\}.$$

Verificare che esso, dotato dell'operazione di prodotto righe per colonne tra matrici, è un gruppo non commutativo con sei elementi.- Scrivere la tabella moltiplicativa di $G$, trovarne i sottogruppi e le relative partizioni in classi laterali destre e sinistre.

**Esercizio 3** (a) Si consideri l'operatore lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L_A(X) = AX$, associato alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

($\alpha$ è un parametro reale).
(a) Determinare basi per l'immagine e il nucleo di $L_A$ al variare di $\alpha$.
(b) Provare che per $\alpha = 1/2$ $L_A$ non è diagonalizzabile.
(c) Provare che per $\alpha = -4$ $L_A$ è diagonalizzabile. Trovare una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori per $L_A$.
(d)* Determinare i valori di $\alpha$ per cui $A$ è diagonalizzabile.

**Esercizio 4** Sia

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

(a) Determinare una base per $U$.
(b) Scrivere esplicitamente un isomorfismo tra $U$ e il sottospazio delle matrici $2 \times 2$ simmetriche a traccia nulla.