SOLUZIONI DELLA PROVA DI ALGEBRA DEL 16/2/2004
PROFF. PAPI, PROCESI

Esercizio 1 Risulta $G = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{23}\}$. Ogni elemento diverso da $\overline{1}$ ha ordine 2; in particolare G non è ciclico. I sottogruppi ciclici sono quelli generati da ciascun elemento: tranne il sottogruppo banale hanno tutti ordine 2. Un sottogruppo non ciclico può essere $H = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}\}$, che è isomorfo al gruppo di Klein.

Per costruire un omomorfismo $\varphi : G \to \mathbb{Z}_4$, ricordiamo che deve risultare $G/Ker(\varphi) \cong Im(\varphi) \leq \mathbb{Z}_4$. Poichè φ non deve essere nullo, le uniche due possibilità per $Im(\varphi)$ sono $\mathbb{Z}_4$ ed il suo sottogruppo di ordine due $\{\overline{0}, \overline{2}\}$. La prima eventualità non può capitare, perchè G non ha nessun elemento di ordine 4 e questo è a maggior ragione vero per un quoziente. Consideriamo la seconda possibilità : allora $Ker(\varphi)$ deve avere ordine 4, e possiamo provare a porre $Ker(\varphi) = H$. Pertanto poniamo

$$\varphi(\overline{1}) = \varphi(\overline{5}) = \varphi(\overline{7}) = \varphi(\overline{11}) = \overline{0}$$

e di conseguenza

$$\varphi(\overline{13}) = \varphi(\overline{17}) = \varphi(\overline{19}) = \varphi(\overline{23}) = \overline{2}$$

Per come è stato costruito φ è un omomorfismo.

Esercizio 2 Poichè $\langle (1,3,4) \rangle = \{Id, (1,3,4), (1,4,3)\}$ e

$$(1,2)(3,4) \cdot (1,3,4) \cdot ((1,2)(3,4))^{-1} = (1,2)(3,4) \cdot (1,3,4) \cdot (1,2)(3,4) = (2,4,3) \notin K,$$

deduciamo che K non è normale in A_4. Invece H risulta normale, perchè coniugando una permutazione con struttura ciclica $(2,2,1)$ si ottiene ancora una tale permutazione. Ma H è il sottogruppo che contiene, oltre l'identità , tutte e sole le permutazioni non identiche che hanno esattamente struttura $(2,2,1)$, pertanto H è invariante per coniugazione, quindi è normale.

Il gruppo quoziente A_4/H è $\{H, (1,3,4)H, (1,4,3)H\}$. Infatti esso deve avere ordine 3, in particolare è ciclico e in realtà del tipo $\{Id, a, a^{-1}\}$. Gli elementi H, $(1,3,4)H$ sono distinti per quanto abbiamo visto prima, pertanto l'elemento mancante è la classe dell'inverso di $(1,3,4)$, cioè $(1,4,3)H$.

Esercizio 3 Risulta

$$F(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) = \begin{pmatrix} a_0 & a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 & a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \end{pmatrix}$$

pertanto la matrice cercata è $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Si ha $Ker(F) = \mathbb{R}(t - t^3)$ ed $Im(F) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Il polinomio caratteristico di A è $\lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 4)$, che ha le sole radici reali $0, 1$; in particolare F non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$: Gli autovettori relativi a $0, 1$ sono $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispettivamente.

Esercizio 3 Una base di U è data dai vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Tali vettori, uniti a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ formano una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$, pertanto il teorema di estensione per linearità garantisce esistenza e unicità di un operatore lineare soddisfacente le condizioni assegnate. Per determinare la matrice A osserviamo che $F(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Inoltre

$$F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$F(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = F(-\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Pertanto $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Infine, F è diagonalizzabile perchè $\mathcal{B}$ è una base di autovettori.