ESERCIZI N. 1, LOGICA MATEMATICA PER INFORMATICA 2010/2011

DEADLINE: VENERDÌ 5 NOVEMBRE ALL'INIZIO DELLA LEZIONE. LE RISPOSTE DEVONO ESSERE DETTAGLIATE E LE DIMOSTRAZIONI COMPLETE. IL LAVORO DEVE ESSERE INDIVIDUALE.

Esercizio 1 Consideriamo il linguaggio $\mathcal{L}$ con due simboli di relazione binaria I e L, due simboli di funzione binaria m e p, un simbolo di funzione unaria s, una costante c. Indichiamo con $\mathbb{N}$ la struttura per $\mathcal{L}$ con dominio $\mathbf{N}$ (i numeri naturali), che interpreta c come 0, I come l'identità, L come la relazione d'ordine $<$ sui naturali, p come la somma, m come la moltiplicazione, s come il successore.

Descrivere nel linguaggio naturale l'insieme di tutti e soli gli elementi del dominio che soddisfano (se sostituiti all'unica variabile libera) le formule seguenti in $\mathbb{N}$.

(1) $(\exists v_2)(I(p(v_2, v_2), v_1))$.
(2) $(\forall v_2)(\neg L(v_2, v_1))$.
(3) $\neg I(v_1, s(c)) \wedge (\forall v_2)((\exists v_3)I(v_1, m(v_2, v_3)) \to I(v_2, v_1) \vee I(v_2, s(c)))$.

Esercizio 2 Consideriamo la struttura $\mathbb{Q}$ per il linguaggio $\mathcal{L}$ dell'Esercizio 1: il dominio è $\mathbf{Q}$ (i numeri razionali), $c^{\mathbb{Q}}$ è 0, $I^{\mathbb{Q}}$ è l'identità, $L^{\mathbb{Q}}$ è la relazione d'ordine $<$ sui razionali, $p^{\mathbb{Q}}$ è la somma, $m^{\mathbb{Q}}$ è la moltiplicazione, $s^{\mathbb{Q}}$ è il successore.

Descrivere nel linguaggio naturale l'insieme di tutti e soli gli elementi del dominio che soddisfano (se sostituiti all'unica variabile libera) le formule seguenti in $\mathbb{Q}$, rispettivamente.

(1) $I(m(v_1, v_1), s(s(c)))$.
(2) $\neg I(v_1, c) \to (\exists v_2)(I(m(v_1, v_2), s(c)))$.

Esercizio 3 Sia $\mathbb{Z}$ la struttura per il linguaggio $\mathcal{L}$ con dominio $\mathbf{Z}$ (gli interi positivi e negativi) che interpreta c come 0, I come l'identità, L come la relazione d'ordine $<$ sugli interi, p come la somma, m come la moltiplicazione, s come il successore. Esibire un enunciato vero in $\mathbb{N}$ e falso in $\mathbb{Z}$. Esibire un enunciato vero in $\mathbb{Z}$ e falso in $\mathbb{Q}$. Esibire un enunciato vero in $\mathbb{Q}$ e falso in $\mathbb{N}$ e in $\mathbb{Z}$.

Esercizio 4 Dimostrare i seguenti quattro punti.

(1) Siano t e u termini. Sia α un assegnamento in un dominio A. Sia t' il risultato della sostituzione di tutte le occorrenze di v_i in t con u. Sia $\alpha' = \alpha\binom{v_i}{\alpha(u)}$. Dimostrare che $\alpha(t') = \alpha'(t)$. (Usare l'induzione sulla struttura del termine t).
(2) Sia t libero per v_i in $F(v_i)$. Indichiamo con $F(t)$ il risultato della sostituzione simultanea di tutte le occorrenze di v_i in $F(v_i)$ con t. Dimostrare che $\mathfrak{A} \models F(t)[\alpha]$ se e solo se $\mathfrak{A} \models F(v_i)[\alpha\binom{v_i}{\alpha(t)}]$. (Usare l'induzione sulla struttura della formula $F(v_i)$).
(3) Sia t libero per v_i in $F(v_i)$. Dimostrare che, se $\mathfrak{A} \models (\forall v_i)F(v_i)[\alpha]$, allora $\mathfrak{A} \models F(t)[\alpha]$ (i.e., $(\forall v_i)F(v_i) \to F(t)$ è valida).

Esercizio 5 Dimostrare che le equivalenze seguenti non sono logicamente valide. Esibire, per ogni punto, una interpretazione in cui un termine dell'equivalenza è vero e l'altro è falso.

(1) $(\exists x)(F \wedge G) \leftrightarrow ((\exists x)F \wedge (\exists x)G)$.
(2) $(\forall x)(F \vee G) \leftrightarrow ((\forall x)F \vee (\forall x)G)$.
(3) $(\forall x)(F(x) \vee G(x)) \leftrightarrow (F(x) \vee \forall x G(x))$.
(4) $((\forall x)F(x) \to G) \leftrightarrow \forall x(F(x) \to G)$.

Esercizio 6 Esibire un enunciato vero in tutte le strutture finite ma falso in qualche struttura infinita.

Esercizio 7 Sia F una formula senza quantificatori, funzioni, né costanti.

(1) Una formula del tipo $\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y_1 \dots \exists y_m F$ con $m \geq 0$ e $n \geq 1$ è valida se e solo se è vera in ogni struttura (non vuota) con $\leq n$ elementi.
(2) Una formula del tipo $\exists y_1 \dots \exists y_m F$ è valida se e solo se è vera in ogni struttura con 1 elemento.