LOGICA MATEMATICA PER INFORMATICA

A.A. 10/11, DISPENSA N. 2

SOMMARIO. Assiomi dell'identità, modelli normali. Forma normale negativa, forma normale prenessa, forma normale di Skolem.

1. L'identità

Esistono due approcci all'identità in logica del I ordine. Abbiamo scelto di trattare il simbolo = come un simbolo speciale (logico) e abbiamo richiesto (nella *definizione* di soddisfazione) che venisse sempre interpretato come la relazione di identità nel modello. In alternativa possiamo trattare l'identità come una relazione binaria.

In questo caso dobbiamo cercare di assiomatizzarla. Il punto è che non è possibile formulare assiomi che forzino l'interpretazione di un simbolo binario di relazione ad essere esattamente la relazione di identità. Si possono però formulare assiomi che forzino l'interpretazione di un simbolo ad essere una relazione di equivalenze. Da ogni modello di questi assiomi si ottiene – quozientando rispetto a questa relazione di equivalenza – un modello in cui la relazione viene interpretata come l'identità. Vediamo i dettagli.

Per un simbolo binario di relazione I chiamiamo *Assiomi dell'Identità* per I gli enunciati seguenti.
1. $\forall x I(x,x)$.
2. $\forall x \forall y (I(x,y) \to (F(x,x) \to F(x,y)))$, per ogni formula $F(x,x)$, dove $F(x,y)$ è una formula ottenuta da $F(x,x)$ per sostituzione di alcune (non necessariamente tutte) le occorrenze di x con y, e y è libera per x in $F(x,x)$.

Lemma 1.1 (Esercizio)**.** *Se T è una teoria che implica gli Assiomi dell'Identità per un simbolo binario di relazione I, allora per ogni termine t, s, r, valgono i seguenti punti.*

1. $T \models I(t,t)$.
2. $T \models I(t,s) \to I(s,t)$.
3. $T \models I(t,s) \to (I(s,r) \to I(t,r))$.

Corollario 1.2 (Esercizio)**.** *Sia $\mathfrak{A}$ un modello di una teoria T che implica gli assiomi dell'identità per una relazione binaria I. La relazione $I^{\mathfrak{A}}$ è una relazione di equivalenza su A.*

Proposizione 1.3. *Sia T una teoria che implica gli assiomi dell'identità per una relazione binaria I. Se T ha un modello allora T ha un modello in cui I è interpretata come l'identità. Chiamiamo un tale modello modello normale.*

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{A}$ un modello di T. Allora $I^{\mathfrak{A}}$ è una relazione di equivalenza sul dominio A. Per leggibilità denotiamo questa relazione con E. Quozientiamo A rispetto a E. Poniamo

$$B = \{[a]_E \quad a \in A\},$$

dove con $[a]_E$ indichiamo la classe di equivalenza dell'elemento a. Definiamo l'interpretazione in $\mathfrak{B}$ delle costanti, relazioni e funzioni del linguaggio.

(Costanti) Poniamo $c_i^{\mathfrak{B}}$ uguale a $[c_i^{\mathfrak{A}}]_E$.

Note preparate da Lorenzo Carlucci, carlucci@di.uniroma1.it.

(Relazioni) $(b_1, \dots, b_k) \in R^{\mathfrak{B}}$ se e solo se $(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathfrak{A}}$, dove a_i è un rappresentante della classe di equivalenza b_i. Per dimostrare che la definizione è ben posta (e che non dipende dalla scelta dei rappresentanti) occorre osservare che, per ogni simbolo di relazione R,

$$T \models \bigwedge_{i=1}^{k} I(x_i, y_i) \rightarrow (R(x_1, \dots, x_k) \leftrightarrow R(y_1, \dots, y_k))$$

segue dal fatto che T implica gli Assiomi dell'Identità per I.

(Funzioni) $f^{\mathfrak{B}}(b_1, \dots, b_k)$ è definito come $[f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_k)]_E$, dove a_i è un rappresentante della classe di equivalenza b_i. Per dimostrare che la definizione è ben posta (e che non dipende dalla scelta dei rappresentanti) occorre osservare che, per ogni simbolo di funzione f,

$$T \models \bigwedge_{i=1}^{k} x_i = y_i \rightarrow I(f(x_1, \dots, x_k), f(y_1, \dots, y_k))$$

segue dal fatto che T implica gli assiomi dell'identità per I.

Dimostriamo che $I^{\mathfrak{B}}$ è l'identità su B. Vale $(b_1, b_2) \in I^{\mathfrak{B}}$ se e solo se b_1 è $[a_1]_I$, b_2 è $[a_2]_I$ e $(a_1, a_2) \in E$. Ma allora la classe di equivalenza b_1 coincide con la classe di equivalenza b_2.

Dimostriamo che $\mathfrak{B}$ è un modello di T.

Sia $\alpha = (a_i)_{i \in \mathbf{N}}$ un assegnamento in A. L'assegnamento induce un corrispondente assegnamento su B ponendo $\widehat{\alpha} := ([a_i]_E)_{i \in \mathbf{N}}$. Se α associa a_i a v_i, $\widehat{\alpha}$ associa $[a_i]_E$.

Cominciamo con il dimostrare che per ogni termine t, vale

$$[\alpha(t)]_E = \widehat{\alpha}(t).$$

Se t è v_i, allora

$$[\alpha(t)]_E = [a_i]_E = \widehat{\alpha}(v_i),$$

per definizione di $\widehat{\alpha}$. Se t è una costante c_i, qualunque sia α vale $\alpha(c_i) = c_i^{\mathfrak{A}}$ (per definizione di estensione di un assegnamento ai termini non variabili). Se t è $f(t_1, \dots, t_k)$ allora

$$[\alpha(t)]_E = [f^{\mathfrak{A}}(\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_k))]_E.$$

Per ipotesi induttiva vale

$$[\alpha(t_i)]_E = \widehat{\alpha}(t_i).$$

Per definizione di assegnamento, per definizione di $f^{\mathfrak{B}}$ e per quanto appena visto vale

$$\widehat{\alpha}(f(t_1, \dots, t_k)) = f^{\mathfrak{B}}(\widehat{\alpha}(t_1), \dots, \widehat{\alpha}(t_k)) = [f^{\mathfrak{A}}(\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_k))]_E.$$

Dimostriamo ora che per ogni α su A e per ogni formula F,

$$\mathfrak{A} \models F[\alpha] \quad \text{se e solo se } \mathfrak{B} \models F[\widehat{\alpha}].$$

La dimostrazione è per induzione sulla struttura della formula F. Vediamo solo alcuni casi.

Se F è $R(t_1, \dots, t_k)$, allora $\mathfrak{A} \models F[\alpha]$ se e solo se

$$(\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_k)) \in R^{\mathfrak{A}}.$$

Ma questo vale se e solo se

$$([\alpha(t_1)]_E, \dots, [\alpha(t_k)]_E) \in R^{\mathfrak{B}}.$$

Ossia se e solo se $\mathfrak{B} \models F[\widehat{\alpha}]$.

Se F è $\forall v G$, allora $\mathfrak{A} \models F[\alpha]$ se e solo se

$$\text{Per ogni } a \in A \quad \mathfrak{A} \models G\left[\alpha\binom{v}{a}\right]$$

che per ipotesi induttiva vale se e solo se

$$\text{Per ogni } a \in A \quad \mathfrak{B} \models G\left[\widehat{\alpha\binom{v}{a}}\right]$$

che equivale a

$$\text{Per ogni } [a]_E \in B \quad \mathfrak{B} \models G\left[\widehat{\alpha}\binom{v}{[a]_E}\right]$$

che equivale a $\mathfrak{B} \models \forall v G\,[\widehat{\alpha}]$.

Da quanto dimostrato segue

$$\mathfrak{A} \models F \quad \text{se e solo se } \mathfrak{B} \models F.$$

In particolare, $\mathfrak{B}$ è un modello di T. □

2. Forme Normali

2.1. **Forma Normale Prenessa.** Una formula è in *forma normale prenessa* se inizia con un prefisso di quantificatori seguito da una formula senza quantificatori.

Usiamo le seguenti equivalenze logiche per dimostrare che ogni formula è logicamente equivalente a una formula normale prenessa.

$$\exists x(F \vee G) \equiv \exists x F \vee \exists x G$$

$$\forall x(F \wedge G) \equiv \forall x F \wedge \exists x G$$

Se x non occorre in F,

$$F \vee \exists x G \equiv \exists x(F \vee G), \quad F \wedge \exists x G \equiv \exists x(F \wedge G)$$

$$F \wedge \forall x G \equiv \forall x(F \wedge G), \quad F \vee \forall x G \equiv \forall x(F \vee G)$$

$$\neg \exists x \neg F \equiv \forall x F$$

$$\neg \forall x \neg F \equiv x \exists F$$

$$\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F, \quad \forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$$

Due osservazioni utili per la prossima dimostrazione.

Osservazione 2.1 (Sostituire sottoformule equivalenti)**.** Se G è una sottoformula di G e G è equivalente a G' allora F è equivalente alla formula ottenuta da F sostituendo ogni occorrenza di G con G'.

Osservazione 2.2 (Rinominare variabili vincolate)**.** Se y non appare in $\forall x G$, allora $\forall y G(y)$ è equivalente a $\forall x G$, dove $G(y)$ indica la formula ottenuta da G sostituendo tutte le occorrenze di x con y.

Proposizione 2.3 (Forma Normale Prenessa)**.** *Per ogni formula F esiste una formula F' in forma normale prenessa e logicamente equivalente a F. Esiste un algoritmo per ottenere F' da F.*

Dimostrazione. Induzione sulla struttura della formula F. Per le formule atomiche è banale.

Sia F di tipo $\neg G$. Sia G equivalente a $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n G'$ con i Q_i quantificatori e G' senza quantificatori. Allora

$$F \equiv \neg Q_1 x_1 \dots Q_n x_n G' \equiv Q_1^- x_1 \dots Q_n^- x_n \neg G',$$

dove Q_i^- è $\forall$ se Q_i è $\exists$ e viceversa.

Sia F di tipo $G \wedge H$. Sia G equivalente a $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n G'$ e H equivalente a $Q_1 y_1 \dots Q_k y_k H'$ dove possiamo assumere (per rinominazione di variabili) che le x e le y siano due a due distinte e diverse dalle variabili libere in G e H. Allora

$$F \equiv Q_1 x_1 \dots Q_n x_n G' \wedge Q_1 y_1 \dots Q_k y_k H' \equiv Q_1 x_1 \dots Q_n x_n Q_1 y_1 \dots Q_k y_k (G' \wedge H').$$

Sia F di tipo $\forall v G$. Sia G equivalente a $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n G'$. Possiamo assumere (rinominando le variabili) che le variabili vincolate di $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n G'$ sono diverse da v. Allora

$$F \equiv \forall v G \equiv \forall v Q_1 x_1 \dots Q_n x_n G'.$$

□

2.2. **Forma Normale di Skolem.** Una formula è in *forma normale di Skolem* se è del tipo $\forall x_1 \dots \forall x_k G$, dove G è una formula senza quantificatori. Non è vero che ogni formula è logicamente equivalente a una formula in forma normale di Skolem, ma vale qualcosa di più debole: ad ogni enunciato S si può associare un enunciato S' in forma normale di Skolem tale che S' è scritto in un linguaggio che estende quello di S con simboli di funzione e costanti, S' implica logicamente S e ogni modello di S si può espandere ad un modello di S' aggiungendo interpretazioni per funzioni e costanti.

L'idea si spiega bene con un esempio. Consideriamo un enunciato S di forma

$$\forall x \exists y R(x,y).$$

Un enunciato di questo tipo esprime una *dipendenza funzionale* di y da x. In ogni modello $\mathfrak{A}$ di questo enunciato, vale che **per ogni** $a \in A$ **esiste** un $a' \in A$ tale che $R^{\mathfrak{A}}(a,a')$. In altre parole, nel modello è definita implicitamente una funzione totale $a \mapsto a'$ dove a' sta nella relazione $R^{\mathfrak{A}}$ con a. Sia ora f un nuovo simbolo di funzione. Nel seguente enunciato S' usiamo f per esplicitare la dipendenza funzionale implicita in S.

$$\forall x R(x, f(x)).$$

Si vede chiaramente che da un modello che soddisfa S si può passare a un modello (per il linguaggio esteso con f) che soddisfa S': interpretiamo f proprio con la funzione $a \mapsto a'$ definita implicitamente da S nel suo modello. Si vede anche chiaramente che se una struttura (per il linguaggio esteso) soddisfa S', allora soddisfa anche S. Una tale struttura contiene esplicitamente una funzione per interpretare f.

Proposizione 2.4 (Forma Normale di Skolem)**.** *Per ogni enunciato S esiste enunciato S' in forma normale di Skolem tale che valgono i due punti seguenti.*

(1) *S' è in un linguaggio che estende il linguaggio di E con nuovi simboli di funzione.*
(2) *$S' \models S$.*
(3) *Ogni modello di E si può estendere a un modello di E' aggiungendo nuove funzioni.*

Dimostrazione. Sia

$$E = Q_1 x_1 \dots Q_t x_t G(x_1, \dots, x_t),$$

con $G(x_1, \dots, x_t)$ aperta. Dato che per ipotesi E è un enunciato, $x_1, \dots, x_t$ sono tutte e sole le variabili libere in G.

Mostriamo un procedimento per eliminare i quantificatori esistenziali, uno per uno, partendo dall'esterno.

Sia Q_k il quantificatore esistenziale più esterno in E. Allora possiamo scrivere E come segue.

$$E = \forall x_1 \dots \forall x_{k-1} \exists x_k Q_{k+1} x_{k+1} \dots Q_t x_t E(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_t).$$

Sia f un simbolo di funzione a $k-1$ posti che non appare in E (se $k=1$ allora f è una costante). Eliminiamo il quantificatore esistenziale $\exists x_k$ usando il nuovo simbolo per esplicitare una dipendenza funzionale dalle variabili $f(x_1, \dots, x_{k-1})$.

$$E' := \forall x_1 \dots \forall x_{k-1} Q_{k+1} x_{k+1} \dots Q_t x_t E(x_1, \dots, x_{k-1}, f(x_1, \dots, x_{k-1}), x_{k+1}, \dots, x_t).$$

Dimostriamo che $E' \models E$. Sia $\mathfrak{A} \models E'$. Allora per ogni $a_1, \dots, a_{k-1}$ in A, è definito $f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_{k-1})$ e vale

$$\mathfrak{A} \models Q_{k+1} x_{k+1} \dots Q_t x_t E(a_1, \dots, a_{k-1}, f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_{k-1})).$$

Dunque

$$\mathfrak{A} \models \forall x_1 \dots \forall x_{k-1} \exists x_k Q_{k+1} x_{k+1} \dots Q_t x_t E(x_1, \dots, x_k, f(x_1, \dots, x_{k-1})),$$

dunque $\mathfrak{A} \models E$.

Dimostriamo l'ultimo punto della Proposizione. Sia $\mathfrak{A} \models E$. Sia f un simbolo di funzione a $k-1$ posti e non già interpretato in $\mathfrak{A}$. Definiamo

$$f^{\mathfrak{A}} : A^{k-1} \to A$$

in modo che la struttura ottenuta da $\mathfrak{A}$ aggiungendo l'interpretazione di f soddisfi E'. Per ipotesi abbiamo che

$$\mathfrak{A} \models \forall x_1 \dots \forall x_{k-1} \exists x_k Q_{k+1} x_{k+1} \dots Q_t x_t E(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_t).$$

Dunque per ogni $a_1, \dots, a_{k-1}$ in A esiste un b in A tale che

$$\mathfrak{A} \models Q_{k+1} x_{k+1} \dots Q_t x_t E(a_1, \dots, a_{k-1}, b).$$

Scegliamo un tale b e poniamo $f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_{k-1}) = b$. Allora per ogni $a_1, \dots, a_{k-1}$ vale

$$(\mathfrak{A}, f^{\mathfrak{A}}) \models Q_{k+1}x_{k+1} \dots Q_t x_t E(a_1, \dots, a_{k-1}, b).$$

Dunque

$$(\mathfrak{A}, f^{\mathfrak{A}}) \models \forall x_1 \dots \forall x_{k-1} Q_{k+1}x_{k+1} \dots Q_t x_t E(x_1, \dots, x_{k-1}, f(x_1, \dots, x_{k-1})).$$

Dunque $(\mathfrak{A}, f^{\mathfrak{A}}) \models E'$. $\square$