Di seguito, potete trovare i testi (con risposta) degli esercizi svolti (o proposti) nel corso di esercitazioni dell'insegnamento di Matematica applicata.

Esercizi di probabilità discreta

Algebra degli eventi

Esercizio 0.1 ***La prova è "lancio di un dado". Essa genera 6 possibili esiti (uscita della faccia con 1 punto, ... , uscita della faccia con 6 punti) che indichiamo, rispettivamente con*** $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$***. Definiamo, poi, gli eventi seguenti:***

$$A = \{E_1, E_2\}\,; \quad B = \{E_3, E_4, E_5\}\,; \quad C = \{E_1, E_3, E_5\}\,; \quad D = \{E_2, E_4, E_6\}$$

Si chiede di determinare $A \cup B, \quad A \cup C, \quad A \cup B \cup D.$

Esercizio 0.2 ***Nella prova dell'esercizio 1.1, si chiede di determinare*** $A \cap B$, $A \cap C$, $A \cap C \cap D$***.***

Esercizio 0.3 ***Si consideri il lancio di un dado ed i seguenti eventi***

$$\begin{aligned} A &: \textit{"uscita di un numero pari";} \\ B &: \textit{"uscita di un numero } < 4''. \end{aligned}$$

Si esprima $A \cup B$, $A \cap B$ e $\overline{A}$.

Esercizio 0.4 ***La prova è "lancio di due dadi". In tale prova si generano 36 possibili risultati espressi dal fatto che ciascuna delle 6 facce del primo dado si può associare con ognuna delle 6 facce del secondo dado. Indichiamo con*** S_j ***l'evento: "la somma dei punti è il numero*** j***" per*** $j = 2, 3, ...12$***. Su tale esperimento, definiamo i seguenti eventi***

$$\begin{aligned} A &= \{\textit{somma dei punti è al massimo 4}\} = \{S_2, S_3, S_4\}\,; \\ B &= \{\textit{somma dei punti inferiore a 9}\} = \{S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8\}\,; \\ C &= \{\textit{somma dei punti superiore a 4}\} = \{S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11}, S_{12}\}\,; \\ D &= \{\textit{somma dei punti è 6 oppure 7}\} = \{S_6, S_7\}\,. \end{aligned}$$

Determinare $\overline{B} \cup \overline{C}, \quad \overline{B \cup C}, \quad \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{D}$***.***

Esercizio 0.5 ***L'esperimento è "estrazione di una biglia da un'urna che contiene 20 biglie numerate da 1 a 20". Definiamo i seguenti eventi***

$$\begin{aligned} A &= \{E_1, E_2, E_3, E_5, E_6, E_7\}\,; \quad B = \{E_7, E_8, E_{11}, E_{12}, E_{15}, E_{16}\}\,; \\ C &= \{E_{13}, E_{14}, E_{15}, E_{17}, E_{18}, E_{19}\}\,; \quad D = \{E_4, E_9, E_{10}, E_{20}\}\,. \end{aligned}$$

Dimostrare che tali eventi non costituiscono una partizione di Ω***.***

Esercizio 0.6 ***Lo spazio campione per il lancio di una moneta è***

$$\Omega_1 = \{T, C\}$$

Esplicitare il prodotto cartesiano $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_1$ ***ed interpretare il risultato ottenuto.***

Esercizio 0.7 ***Un esperimento consiste nel lancio di tre monete una dopo l'altra. Rappresentare lo spazio campione*** Ω ***e disegnare il corrispondente diagramma ad albero***.

Probabilità discreta

Esercizio 0.8 ***La prova è: "lancio di due monete ben equilibrate". Si calcoli la probabilità dell'evento E: "almeno una delle due monete è testa".*** *[R. 3/4]*

Esercizio 0.9 ***La prova è: "lancio di due dadi simmetrici". Si calcoli la probabilità dell'evento E: "somma dei punti sulle due facce è 5".***
[R. 1/9]

Esercizio 0.10 ***La prova è: "estrazione di una carta da un mazzo di 52 carte". Si calcoli la probabilità di***:

a) ***estrarre un 8 di picche****;*

b) ***estrarre una figura (J,Q,K)****;*

c) ***estrarre un asso o una carta di fiori***.

[R. a)1/52; b) 3/13*; c)* 4/13*]*

Esercizio 0.11 ***Supponiamo di avere un bersaglio*** B ***(vedi figura) composto di 3 zone disgiunte. Supponiamo che si sappia che la probabilità di colpire la zona I sia*** $P(I) = 5/100$***, quella di colpire la zona II sia*** $P(II) = 10/100$ ***e quella di colpire la zona III sia*** $P(III) = 17/100$. ***Si calcoli la probabilità di***

a) ***colpire il bersaglio;***

b) ***non colpire il bersaglio.***

[R a)0.32; b)0.68]

Esercizio 0.12 ***Tre ciclisti sono in gara su una pista. Indichiamoli con A, B, C. Supponiamo di sapere che***

i) ***la probabilità di vittoria di A è il doppio di quella di B;***

ii) ***la probabilità di vittoria di B è il doppio di quella di C.***

Calcolare $P(A), P(B), P(C)$ ossia la probabilità di vittoria di ogni ciclista e la probabilità che vinca B oppure C.
[R. $P(A) = 4/7$; $P(B) = 2/7$; $P(B \cup C) = 3/7$]

Esercizio 0.13 ***Pierino ($\mathcal{P}$) e Filippo ($\mathcal{F}$) escono da scuola e, per festeggiare la riacquistata libertà, suonano a caso alcuni campanelli del condominio di fronte. Su dieci campanelli, Pierino ne suona sette; Filippo ne suona quattro. Se C indica un determinato campanello (signora X, V^o piano), calcolare:***

a) ***la probabilità che sia stato suonato da Pierino;***

b) ***la probabilità che sia stato suonato da almeno uno dei due ragazzi;***

c) ***la probabilità, che non sia stato suonato da nessuno dei due.***

[R. a)7/10; b)41/50; c)9/50]

Esercizio 0.14 ***Si sa che ognuna di quattro persone, A,B,C,D dice la verità con probabilità $p = 1/3$. A ha fatto un'affermazione. Consideriamo, poi, il seguente evento: "D dice che C dice che B dice che A ha detto la verità". Qual è la probabilità che A abbia detto la verità?***
[R. 1/3]

Esercizio 0.15 ***In una stanza vi sono 20 persone. Qual' è la probabilità che almeno 2 festeggino il compleanno lo stesso giorno? (si noti che non si richiede di avere la stessa età, ma solo lo stesso giorno e mese di nascita).*** *[R. $\simeq 0.411$]*

Esercizio 0.16 ***Supponiamo che l'accadere simultaneo degli eventi A_1 e A_2 implichi l'accadere dell'evento A. Provare che***

$$P(A) \geq P(A_1) + P(A_2) - 1.$$

Esercizio 0.17 ***Una popolazione si compone per il* 40% *di fumatori (F) e per il* 60% *di non fumatori (N). Si sa che il* 25% *dei fumatori e il* 7% *dei non fumatori sono affetti da una certa forma di malattia respiratoria (M). Calcolare la probabilità che un individuo scelto a caso dalla popolazione sia affetto dalla malattia.*** *[R. 0.142]*

Esercizio 0.18 ***La prova è: "lancio di due dadi non truccati (e distinguibili)". Se la somma delle due facce è 6 si calcoli la probabilità che uno dei due dadi abbia dato l'esito 2.*** *[R. 2/5]*

Esercizio 0.19 ***Supponiamo che una moneta venga lanciata 3 volte e si considerino i seguenti eventi***

A: ***"il primo lancio è testa";***
B: ***"il secondo lancio è testa";***
C: ***"testa si presenta due volte di seguito e solo due".***

Si verifichi che A e B ed A e C sono eventi indipendenti mentre B e C sono dipendenti.

Esercizio 0.20 ***Un'urna contiene 4 biglie numerate 1, 2, 3, 4: ne vengono estratte due, senza reimmissione. Siano*** X_1, X_2 ***nell'ordine i numeri aleatori estratti. Considerati gli eventi***

$$A = \{X_1 + X_2 = 5\}\,,\; B_k = \{X_1 = k\} \quad k = 1, 2, 3, 4$$

si chiede:

a) ***Calcolare*** $P(A)$ ***e le probabilità condizionate*** $P(A|B_k)$ ***e*** $P(B_k|A)$ ***per*** $k = 1, 2, 3, 4$;

b) ***Esaminare se*** A ***e*** B_k ***sono coppie di eventi indipendenti.***

[R. a) $P(A) = 1/3$; $P(A|B_k) = 1/3$; $P(B_k|A) = 1/4$. *b) sì.]*

Esercizio 0.21 ***Un' urna contiene 2 palline bianche e 3 nere. Si estraggono, una dopo l'altra, due palline dall'urna. Calcolare la probabilità che entrambe le palline siano bianche.***
[R. 1/10 (senza reinserimento) 4/25 (con reinserimento).]

Esercizio 0.22 ***Un' urna contiene 120 palline di cui 30 bianche, 15 nere, 55 verdi e 20 rosse. Calcolare la probabilità che estraendo tre palline dall'urna (con reimmissione) si presentino i colori della bandiera italiana.*** *[R.* $\simeq 0.019$*]*

Esercizio 0.23 ***Un esperimento consiste nel lanciare un dado non truccato e nell'estrarre poi una pallina da una di 3 urne differenti a seconda del risultato del dado (indicheremo le 6 facce del dado con D_i, $i = 1, 2, ..., 6$) secondo lo schema seguente***

- ***se si verifica D_1 (esce cioè 1) si estrae una biglia dall'urna U_1 che contiene 9 biglie bianche e 1 biglia nera;***
- ***se si verifica $D_2 \cup D_3 \cup D_4$ (escono cioè 2 o 3 o 4) si estrae 1 biglia dall'urna U_2 che contiene 1 biglia bianca e 9 nere;***
- ***se si verifica $D_5 \cup D_6$ (esce cioè il 5 o il 6) si estrae 1 biglia dall'urna U_3 che contiene 5 biglie bianche e 5 nere.***

Calcolare la probabilità che, alla fine della prova, si sia verificato l'evento "estrazione di una biglia bianca". *[R. 11/30]*

Esercizio 0.24 ***In riferimento all'esercizio precedente supponiamo, ora, che si estragga una pallina bianca. Qual è la probabilità che essa sia stata estratta dalla seconda urna?*** *[R. 3/22]*

Esercizio 0.25 ***Sulla base di indagini medico-statistiche è noto che lo 0.001% degli italiani è affetto da una certa malattia (ad es. epatite virale), mentre lo 0.01% degli italiani appartiene ad una cosiddetta categoria a rischio. Inoltre si sa che tra gli ammalati l'80% appartiene ad una categoria a rischio. Si calcoli la probabilità che un italiano appartenente ad una categoria a rischio abbia la malattia suddetta.***
[R. 0.08]

Esercizio 0.26 ***Supponiamo che un virus raro sia presente in una popolazione con probabilità 0.00001 (cioè, una persona su 100.000 è portatore di quel virus). Un test clinico è stato sperimentato estesamente e si è accertato che nel 98% dei casi diagnostica correttamente la presenza del virus ma nell'1% dei casi diagnostica il virus anche per una persona sana. Si chiede: se una persona esegue il test e questo risulta positivo quale è la probabilità che la persona abbia effettivamente quel virus?*** *[R. 0.00098]*

Esercizio 0.27 ***Tre macchine A, B, C producono rispettivamente il 50%, il 30% e il 20% del numero totale dei pezzi prodotti da una fabbrica. Si sa che le percentuali di pezzi difettosi di queste macchine sono, rispettivamente, il 3%, il 4% ed il 5%. Dalla produzione complessiva delle tre macchine viene estratto un pezzo a caso. Si chiede***

a) ***determinare la probabilità che esso sia difettoso;***

b) ***supposto che il pezzo estratto sia difettoso, calcolare la probabilità che esso sia stato prodotto dalla macchina A.***

[R. a) 0.037; b) $\simeq 0.40$*]*

Esercizio 0.28 ***Una scatola contiene 2000 pezzi dei quali il 5% è difettoso, una seconda scatola contiene 500 pezzi dei quali il 40% è difettoso. Due altre scatole contengono 1000 pezzi ciascuna con il 10% di pezzi difettosi. Scegliamo, a caso, una di queste quattro scatole ed estraiamo da essa, a caso, un solo pezzo. Qual è la probabilità che esso sia difettoso? Dopo aver estratto il pezzo lo esaminiamo e troviamo che esso è difettoso. Qual'è la probabilità che esso sia stato estratto dalla seconda scatola?*** *[R. a) 0.1625; b)* $\simeq 0.615$*]*

Esercizi di calcolo combinatorio

Esercizio 0.29 ***Le attuali targhe delle automobili in circolazione sono costituite da due lettere (che si possono anche ripetere: AA), da tre cifre (in cui lo zero come prima cifra è ammesso) e ancora da due lettere. Quante targhe distinte si possono formare con tale sistema di classificazione ?*** *[R. 456.976.000]*

Esercizio 0.30 ***Calcolare il numero totale di risultati possibili lanciando 4 dadi.*** *[R. 1296]*

Esercizio 0.31 ***Calcolare il numero totale di possibili risposte ad un test costituito di 20 domande, ciascuna delle quali ammette la scelta tra 3 possibili risposte.*** *[R.* $3^{20} = 3.486.784.401$*]*

Esercizio 0.32 ***Quanti numeri interi positivi di 4 cifre si possono formare con le 10 cifre 0,1,2,......9 se***

a) ***una stessa cifra può essere ripetuta più volte;***

b) ***una stessa cifra non può essere ripetuta più volte;***

c) ***l'ultima cifra deve essere lo zero e uno stessa cifra non può essere ripetuta più volte.***

[R. a) 9000; b) 4536; c) 504]

Esercizio 0.33 ***In quanti modi possono essere coperti i 5 posti di un concorso al quale partecipano 8 candidati?*** *[R. 6720]*

Esercizio 0.34 ***Siano date le seguenti 6 lettere dell'alfabeto: a,b,c,d,e,f. Vogliamo determinare quante parole di tre lettere (con lettere distinte!) si possono formare con le sei lettere assegnate.*** *[R. 120]*

Esercizio 0.35 ***Quanti gruppi, ognuno costituito di 2 elementi, si possono formare con 4 elementi in modo che ogni gruppo differisca dagli altri per almeno un elemento o per l'ordine degli elementi*** *? [R. 12]*

Esercizio 0.36 ***Trovare per quale valore di n si ha***

$$D_{n,2} = 90$$

[R. 10]

Esercizio 0.37 ***Ad un campionato di calcio partecipano 12 squadre. In quanti modi diversi può chiudersi il campionato (cioè: quante possibili classifiche finali possono esserci)?*** *[R. 479.001.600]*

Esercizio 0.38 ***Trovare il numero di anagrammi, tutti diversi, della parola "differenziale"*** *[R. 259.459.200]*

Esercizio 0.39 ***Determinare quanti sono i numeri composti da 5 cifre.*** *(Qui ci riferiamo a numeri che si possono scrivere usando le 9 cifre significative ed anche lo zero). [R. 100.000]*

Esercizio 0.40 ***Quante possibili colonne ci sono nel gioco del totocalcio****? [R. 1.594.323]*

Esercizio 0.41 ***In quanti modi si possono estrarre consecutivamente 3 carte da un mazzo di 52 con le modalità seguenti***

a) ***reinserendo la carta estratta prima di estrarre quella successiva****;*

b) ***senza reinserirla****?*

[R. a)140.608; b)132.600]

Esercizio 0.42 ***Calcolare***

$$\binom{8}{2}, \quad \binom{9}{4}, \quad \binom{12}{5}.$$

[R. a)28; b)126; c)792]

Esercizio 0.43 ***Determinare*** $(a+b)^5$.

Esercizio 0.44 ***Si ritorni all'esercizio 0.7 e si determinino tutte le combinazioni dei quattro oggetti A,B,C,D presi a 2 a 2.*** *[R. 6]*

Esercizio 0.45 ***Tre dadi sono lanciati. Trovare la probabilità che uno qualsiasi di essi mostri un certo punto fissato (ad es. l' 1) sapendo che i punteggi sui tre dadi sono tutti diversi tra loro.*** *[R. 1/2]*

Esercizio 0.46 ***Tre dadi sono lanciati. Trovare la probabilità che esattamente due di essi mostrino lo stesso punteggio.*** *[R.* $90/216$*]*

Esercizio 0.47 ***Si vuole formare una commissione di 2 matematici e 3 fisici. La scelta può essere fatta tra 5 matematici e 7 fisici. In quanti modi può essere formata la commissione se***

a) ***può essere incluso qualsiasi matematico e qualsiasi fisico***,

b) ***un certo fisico deve far parte della commissione***,

c) ***due certi matematici non possono far parte della commissione***?

[R. a)350; b)150; c)105]

Esercizio 0.48 ***Quanti terni si possono formare con i 90 numeri del lotto? E quante cinquine?*** *[R. a)117.480, b)43.949.268]*

Esercizio 0.49 ***Qual è la probabilità di fare un terno al lotto (su una data ruota) ? E una cinquina?*** *[R. a)* $\simeq 5,63 \cdot 10^{-5}$*; b)* $\simeq 2.28 \cdot 10^{-8}$ *]*

Esercizio 0.50 ***Calcolare la probabilità che estraendo contemporaneamente due carte da un mazzo di 52 si "peschino" 2 assi.*** *[R.* $6/1326$*]*

Esercizio 0.51 ***Calcolare la probabilità di estrarre contemporaneamente, da un sacchetto contenente 4 biglie rosse e 3 blu, una biglia rossa e una blu.*** *[R.* $12/21$*]*

Esercizio 0.52 ***Si calcoli la probabilità di avere 4 assi estraendo 5 carte da un mazzo di 52.*** *[R.* $1.85 \cdot 10^{-5}$*]*

Esercizio 0.53 ***Una scatola contiene 8 palline rosse, 3 palline bianche, 9 palline blu. Se si estraggono a caso 3 palline, determinare la probabilità che:***
a) tutte e 3 siano rosse;
b) tutte e 3 siano bianche;
c) 2 siano rosse ed 1 sia bianca;
d) almeno 1 sia bianca;
e) sia estratta una pallina per ogni colore.
[R. a) 14/285; *b)* 1/1140; *c)* 7/95 *d)* 23/57 *e)* 18/95*]*

Esercizio 0.54 ***In una scatola ci sono 15 lampadine e di queste 5 sono bruciate. Prendiamone 3 a caso. Calcolare la probabilità che***

a) ***nessuna sia difettosa;***

b) ***una sia difettosa;***

c) ***almeno una sia difettosa.***

[R: a) 120/455; b) 225/455 c) $1-(24/91) \simeq 0.74$*]*

Esercizio 0.55 ***In quanti modi possono essere disposti 7 individui intorno ad una tavola rotonda se:***

a) ***non importa come siano disposti;***

b) ***due individui particolari non possono essere posti vicini?***

[R. a)720; b) 480]

Esercizio 0.56 ***Una persona ha cinque monete, ciascuna di diverso valore. Quante diverse somme di denaro può formare?*** *[R. 31]*

Variabili casuali unidimensionali

Esercizio 0.57 ***Sia*** X ***la v.c. associata al lancio di un dado non truccato e così definita***

$$X(\omega_i) = i \quad ; \quad i = 1, 2, ..., 6$$

Rappresentare la funzione di ripartizione di tale v.c. discreta.

Esercizio 0.58 ***Una v.c continua*** X ***è definita tra 0 e 10 con funzione di densità costante e pari a 1/10 su tale intervallo. Tale v.c. può essere pensata come se fosse definita sull'intero asse reale*** $\mathcal{R}$***?.***

Esercizio 0.59 ***Sia data la seguente funzione di ripartizione*** $F(x)$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{\textit{se}}\ x < 0 \\ \\ \frac{1}{4}x^2 & \textbf{\textit{se}}\ 0 \leq x \leq 2 \\ \\ 1 & \textbf{\textit{se}}\ x > 2 \end{cases}$$

Determinare la funzione densità di probabilità $f(x)$.

Esercizio 0.60 ***Supponiamo che la funzione di ripartizione*** $F(x)$ ***di una v.c. continua*** X ***sia data dalla formula***

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{\textit{per}} & x \leq 0 \\ ax^2 & \textbf{\textit{per}} & 0 < x \leq 1 \\ 1 & \textbf{\textit{per}} & x > 1 \end{cases}$$

Determinare

a) ***il coefficiente*** a***;***

b) ***la funzione densità*** $f(x)$***;***

c) ***la probabilità che la v.c.*** X ***appartenga all'intervallo [0.25, 0.50] .***

[R. a) $a = 1$*; c) 0.1875]*

Esercizio 0.61 ***Sia*** X ***una v.c. discreta e sia***

$$P(X = k) = p_X(k) = c \cdot \frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

la sua funzione di probabilità ($\lambda > 0$ ***è un parametro fissato e*** c ***è una costante). Determinare la costante*** c***.*** *[R.* $c = e^{-\lambda}$*]*

Esercizio 0.62 ***E' data una v.c.*** X ***continua la cui funzione densità*** $f(x)$ ***è sempre nulla eccetto che in*** $x \in [0, 1]$ ***ove cresce proporzionalmente con*** x***. Cioè***

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{\textit{per}} & x \notin [0, 1] \\ cx & \textbf{\textit{per}} & x \in [0, 1] \end{cases} \qquad c = \textbf{\textit{costante}}$$

Si chiede di determinare c ***e di valutare*** $P(X \leq 0.4)$ ***e*** $P((X < 0.7) \cup (X \geq 0.3))$***.***
[R. a) $c = 2$ *; b)*$P(X \leq 0.4) = 0.16$*,* $P((X < 0.7) \cup (X \geq 0.3)) = 1$*]*

Esercizio 0.63 ***Determinare il valore atteso, la varianza e lo scarto quadratico medio della v.c.*** X ***dell'esercizio precedente.***
[R. $E(X) = 2/3$ *;* $\sigma_X^2 = 1/18$ *;* $\sigma_X = 1/3\sqrt{2}$*]*

Esercizio 0.64 ***Sia*** X ***una variabile casuale con funzione densità data da***

$$f(x) = Ae^{-|x|}$$

Determinare il coefficiente A, il valore atteso, la varianza e lo scarto quadratico medio di X***.***
[R. $A = 1/2$ *;* $E(X) = 0$ *;* $\sigma_X^2 = 2$ *;* $\sigma_X = \sqrt{2}$*]*

Esercizio 0.65 ***Sia*** X ***una variabile casuale di cui si sa che*** $E(X) = 5$ ***e*** $\sigma_X^2 = 4$***. Determinare il più piccolo intervallo in cui cade almeno il 75% delle osservazioni.***
[R. $|x - 5| < 4 \Rightarrow I(1, 9)$ *]*

Leggi di distribuzione

Esercizio 0.66 ***Una sorgente binaria genera le cifre 0 e 1 in modo casuale, con probabilità 0.4 e 0.6, rispettivamente. Calcolare la probabilità che, in una sequenza a 5 cifre, si verifichino almeno tre 1.*** *[R. 0.683]*

Esercizio 0.67 ***Calcolare la probabilità di ottenere 3 volte il 6 in 5 lanci di un dado (non truccato).****[R. 0.032]*

Esercizio 0.68 ***Trovare la probabilità che in una famiglia con quattro figli ci sia***
a) ***almeno un maschio;***
b) ***almeno un maschio ed almeno una femmina.***
Si assuma che la probabilità che nasca un maschio sia 1/2.
[R. a) 0.94; b) 0.88]

Esercizio 0.69 ***Si lancia un dado più volte e si conta quante volte esce il 6. Si chiede:***
a) qual è la probabilità che per ottenere il primo 6 occorra lanciarlo più di 6 volte?
b) qual è la probabilità che per ottenere 10 volte un 6 occorra lanciarlo più di 60 volte?
c) qual è la probabilità dello stesso evento considerato in (b) se ora si sa che, arrivati al 52 lancio, il 6 è già uscito 9 volte?
[R. a) 0.335; c) 0.233]

Esercizio 0.70 ***In una linea produttiva la probabilità con cui sono prodotti pezzi difettosi è 0.01. Valutare la probabilità che su 1000 pezzi prodotti ce ne siano esattamente 4 difettosi.*** *[R. 0.0189]*

Esercizio 0.71 ***Un tiratore spara 3 colpi su un bersaglio. Si sa che la probabilità di colpire il bersaglio con un singolo colpo è*** $p = 0.4$***. Per ogni colpo andato a segno il tiratore guadagna 5 punti. Si chiede di costruire la tabella di distribuzione della v.c.*** X ***che rappresenta il numero di punti che si possono ottenere.***

[R.

x_i	0	5	10	15
p_i	0.216	0.432	0.288	0.064

]

Esercizio 0.72 ***Lanciamo un dado 12 volte e definiamo "successo" l'evento*** E***: "uscita di un 5 o di un 6". Calcolare la la probabilità di 4 successi.*** *[R. 0.238]*

Esercizio 0.73 ***Si lanciano quattro volte due dadi non truccati. Qual'è la probabilità che il sette (considerato come somma delle due facce) non si presenti?*** *[R.0.482]*

Esercizio 0.74 ***Una moneta equilibrata viene lanciata un certo numero*** n ***di volte. Si considerino gli eventi:***

A ***: "Esce T al più una volta"***
B***: "T e C escono almeno una volta ciascuno".***

Si chiede:
a) Calcolare P(A***), P(***B***), P(***$A \cap B$***);***
b) ***Ricavare la probabilità condizionata P(***$B|A$***) e mostrare che esiste un solo valore di*** n ***(e determinarlo) per cui*** A ***e*** B ***sono indipendenti.***
(Suggerimento: esprimere gli eventi A e B tramite la v.a. X= "numero di T in n lanci").
[R. a) $P(A) = \frac{n+1}{2^n}$; $P(B) = \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}$; $P(A \cap B) = \frac{n}{2^n}$. *b)* $P(B|A) = \frac{n}{n+1}$; $n = 3$.*]*

Esercizio 0.75 ***In una partita di 500 pezzi prodotti da una macchina il 10% (cioè 50) risultano difettosi. Un addetto al controllo di qualità ne estrae un campione di 20 pezzi. Determinare la legge della v.c.*** X ***che "conta" il numero di pezzi difettosi che c'è nel campione di 20.***
[R. $P(X = k) = \frac{\binom{50}{k}\binom{450}{20-k}}{\binom{500}{20}}$ *per k = 0,1,2,...,20.]*

Esercizio 0.76 ***Da un mazzo di carte napoletane si estraggono a caso 10 carte (estrazione in blocco senza reimmissione di 10 carte). Calcolare la probabilità che tra esse ci siano 6 carichi (un carico è, in questo caso, un asso o un 2 o un 3).*** *[R. 0.022]*

Esercizio 0.77 ***Da un lotto di 100 schede elettroniche viene estratto un campione di 10 schede, che vengono sottoposte a test. Il lotto sarà respinto se nel campione saranno trovate più di 2 schede difettose. Assumendo che il 10% delle schede del lotto sia difettoso, calcolare la probabilità che sia accettato.*** *[R. 0.94]*

Esercizio 0.78 ***Trovare la probabilità che lanciando una moneta (non truccata) tre volte si presentino***
a) 3 teste;
b) 2 teste e 1 croce;
c) 2 croci e 1 testa;
d) 3 croci. *[R. a) 1/8; b) 3/8; c) 3/8; d) 1/8]*

Esercizio 0.79 ***Un'urna contiene un numero finito di palline numerate in modo che risulti uguale a $\theta \in (0,1)$ la proporzione delle palline recanti un numero pari (per esempio nel gioco del lotto in cui vi sono biglie numerate da 1 a 90 si ha $\theta = 1/2$ dato che metà delle palline ha un numero pari e l'altra metà un numero dispari). La prova è: "estrarre con reimmissione palline sino a che non si verifichi il seguente evento***

E ***: la pallina estratta è di numero pari".***

Relativamente a tale prova definiamo la seguente v.c.

X : "numero di estrazioni prima che accada l'evento E per la prima volta"

Si chiede :
a) di esprimere i valori che può assumere tale v.c.;
b) di calcolare la probabilità che la prova termini dopo più di 4 estrazioni.
[R. a) $X = \{1, 2, ..., i, ...\}$ *(con* $i = 1, 2, ...$*); b)* $(1-\theta)^4$*]*

Esercizio 0.80 ***Sia data una v.c.*** X ***distribuita secondo la legge di Poisson. Si chiede di determinare la probabilità che*** X ***assuma un valore non inferiore a*** k. *[R.* $R_k = 1 - (P_0 + P_1 + ...P_{k-1}) = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} P_m$*]*

Esercizio 0.81 ***Ad un contatore Geiger arrivano, mediamente, ν particelle in un minuto. Supponiamo che il numero di "arrivi" in qualsiasi intervallo di tempo sia distribuito secondo la legge di Poisson. Si chiede di trovare:***

a) ***la probabilità che arrivino esattamente 4 particelle in 10 sec.;***

b) ***la probabilità che in 10 sec. arrivi almeno una particella;***

c) ***la probabilità che in 30 sec. arrivino non meno di 6 particelle.***

[R. a) $P_4 = \frac{\left(\frac{\nu}{6}\right)^4}{4!} e^{-\frac{\nu}{6}}$*; b)* $1 - e^{-\frac{\nu}{6}}$ *; c)* $R_6 = 1 - (P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5)$*]*

Esercizio 0.82 ***L'esperimento casuale è: uscita del primo numero sulla ruota di Napoli. Determinare la probabilità che in 144 settimane il numero 61 esca per primo su quella ruota esattamente per tre volte.*** *[R.0.138]*

Esercizio 0.83 ***Una macchina produce chiodi ma l'1% di questi risulta difettoso (non ha la punta). Quale è la probabilità che in un campione di 200 chiodi non ci siano pezzi difettosi?*** *[R.0.135]*

Esercizio 0.84 ***Calcolare la probabilità che in 10 lanci di una moneta, testa si presenti da 3 a 6 volte comprese.*** *[R. 0.773]*

Esercizio 0.85 ***Una moneta (non truccata) viene lanciata 10.000 volte. Calcolare: a) la probabilità che "Testa" si presenti 5000 volte; b) la probabilità che "Testa" si presenti 5100 volte.*** *[R. a) 0.008; b) 0.001]*

Esercizio 0.86 ***Calcolare la probabilità che un'apparecchiatura, la cui durata di vita X segua una legge di tipo esponenziale, cessi di funzionare in un dato intervallo di tempo $\tau = x_2 - x_1$.*** *[R.* $e^{-\lambda x_2}(e^{\lambda \tau} - 1)$*]*

Esercizio 0.87 ***Supponiamo che un dispositivo sia ancora in funzione dopo un tempo T dall' inizio. Calcolare la probabilità che esso continui a funzionare oltre il tempo T.*** *[R.* $1 - e^{-\lambda x} \equiv F(x)$*]*

Esercizio 0.88 ***Un esperimento consiste nell'osservare una lampadina sino a che si guasta. Sia X la v.c così definita***
X:"durata di funzionamento della lampadina" (in centinaia di ore).
Ovvie considerazioni fisiche suggeriscono di assumere una funzione di densità che decresce al crescere di x e, tra le funzioni di tale classe, supponiamo di scegliere la seguente

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \textit{per } x \geq 0 \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases}$$

Si chiede di calcolare:

a) la probabilità che la lampadina duri più di 50 ore;

b) la probabilità che duri tra 50 e 100 ore;

c) la probabilità che duri al massimo 200 ore.

[R. a) 0.606; b) 0.239; c) 0.865]

Esercizio 0.89 ***Supponiamo che la v.c.*** X : ***"peso (in kg) di una persona adulta di sesso maschile", estratta a caso da una popolazione, sia ben approssimata da una v.c. normale con parametri*** $m = 79.035$***,*** $\sigma^2 = 70.040$ ***(e quindi*** $\sigma \simeq 8.369$***). Si chiede di determinare la probabilità dei seguenti eventi***

a) La persona abbia un peso compreso tra 70 e 90 kg;

b) la persona pesi più di 95 kg;

c) la persona pesi meno di 60 kg oppure più di 110 kg.

[R. a) 0.7648; b) 0.0285; c) 0.0121]

Esercizio 0.90 ***Sia*** X ***una generica v.c. di valore atteso*** e_x ***e varianza*** σ^2***. Si calcoli la probabilità con cui*** X ***si scosti dal suo valore atteso non meno di*** 3σ***.*** *[R.* $1/9 \simeq 0.11$*]*

Variabili casuali multivariate

Esercizio 0.91 ***L'esperimento casuale è "lancio di una coppia di dadi". In tale esperimento definiamo la v.c. doppia*** (X, Y) ***discreta***

X : ***"il più grande fra i due numeri usciti"***
Y : ***"somma dei due numeri.***

Rappresentare la funzione di probabilità congiunta.

Esercizio 0.92 ***L'esperimento è il seguente: "estrazione di una biglia da ciascuna di 3 urne ognuna delle quali contiene 3 palline numerate con i numeri 1, 2, 3".***
Su tale esperimento definiamo la seguente v.c. doppia (X, Y***) discreta***
X = ***"somma dei numeri delle tre biglie estratte"***
Y = ***"differenza tra il più grande e il più piccolo numero tra i tre estratti"***
Si chiede di studiare questa v.c. doppia.

Esercizio 0.93 ***Riferendosi all'esercizio precedente, ricavare la distribuzione di probabilità delle v.c. marginali X e Y.***

Esercizio 0.94 ***Riferendosi all'esercizio precedente, esaminare la legge condizionata di distribuzione di ciascuna delle v.c. X, Y.***

Esercizio 0.95 ***In relazione all'esercizio precedente calcolare il valore medio e la varianza di $(X|Y = y)$ per ciascun y prefissato.***

[R. $E(X|Y = 0) = 6; E(X|Y = 1) = 6; E(X|Y = 2) = 6;$
$\sigma^2(X|Y = 0) = 6; \sigma^2(X|Y = 1) = 2.5; \sigma^2(X|Y = 2) = 0.5$*]*

Esercizio 0.96 ***Le variabili aleatorie X e Y possono assumere i valori (-1,0,1), con probabilità congiunta***

$$p_{ik} = P(X = i, Y = k) = c|\, i + k\,| \qquad (i, k = -1, 0, 1)$$

Si chiede:

a) Determinare la costante c;

b) Calcolare le probabilità marginali di X e Y, le loro medie e varianze, la covarianza ed il coefficiente di correlazione.

[R. a) c=1/8 ; b) $P_{Y=-1} = \frac{3}{8} \quad P_{Y=0} = \frac{1}{4} \quad P_{Y=1} = \frac{3}{8}$
$P_{X=-1} = \frac{3}{8} \quad P_{X=0} = \frac{1}{4} \quad P_{X=1} = \frac{3}{8}\ , \quad E(X) = 0 = E(Y)\ ,$
$\sigma^2_X = \frac{3}{4} = \sigma^2_Y, \quad \sigma_{XY} = \frac{1}{2}\ , \quad \rho_{XY} = \frac{2}{3}$ *]*

Esercizio 0.97 ***Sia data la v. c. doppia continua (X, Y) con funzione densità di probabilità congiunta***

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{\pi^2(1 + x^2)(1 + y^2)}$$

Determinare

- ***a) la funzione di ripartizione congiunta $F_{XY}(x, y)$;***
- ***b) calcolare la probabilità che il punto aleatorio $P \equiv (X, Y)$ giaccia nel quadrato $Q \equiv (0, 1) \times (0, 1)$ rappresentato in fig.1***

[R. a) $F_{XY} = (\frac{1}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2})\ (\frac{1}{\pi} \arctan y + \frac{1}{2})$*; b) 1/16 = 0.062]*

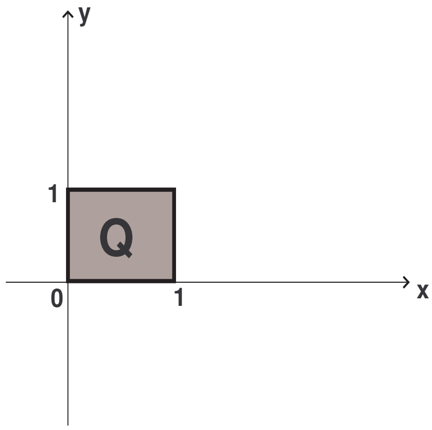

Figura 1: *Il dominio Q*

Esercizio 0.98 ***È assegnata la v.c. doppia continua (**X, Y**) avente densità di probabilità congiunta***

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} a\sin(x+y) & \textbf{\textit{in D}} \\ \textbf{\textit{0}} & \textbf{\textit{altrove}} \end{cases}$$

ove il dominio D ***è individuato da*** $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$***,*** $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$***. Si chiede di determinare***

a) il coefficiente a***;***

b) i valori attesi $E(X), E(Y)$***;***

c) le varianze σ_X^2 ***e*** σ_Y^2***;***

d) la covarianza σ_{XY}.

[R. a) $a = 1/2$ *; b)* $E(X) = E(Y) = \pi/4$*; c)* $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = (\pi^2 + 8\pi + 32)/16$ *;*
d) $\sigma_{XY} = (8\pi - 16 - \pi^2)/16$*]*

Esercizio 0.99 ***Sia (**X, Y**) una v.c. bidimensionale ove*** X ***è una v.c. uniforme nell'intervallo (0 , 0.2) ed*** Y ***è una v.c. esponenziale con parametro 5. Le due componenti*** X ***ed*** Y ***sono indipendenti. Si chiede***

a) determinare la funzione densità congiunta $f_{XY}(x,y)$***;***

b) calcolare $P(Y \leq X)$***.***

[R. a) $f_{XY}(x,y) = 25e^{-5y}$ *per* $0 < x < 0.2,\ y > 0$ *e* 0 *altrove;*
b) $P(Y \leq X) = e^{-1} \simeq 0.368$*]*

Esercizio 0.100 ***La funzione densità congiunta di*** (X,Y) ***è data da***

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)} & \textbf{\textit{per}} \quad x > 0,\ y > 0 \\ \\ 0 & \textbf{\textit{altrove}} \end{cases}$$

a) si dimostri che la $f_{XY}(x,y)$ ***soddisfa la*** $\iint_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dxdy = 1$

b) si calcolino le funzioni densità marginali di X ***e*** Y***.***

[R. b) $f_X(x) = e^{-x} \quad (x > 0)$ *ed* $f_Y(y) = \dfrac{1}{(y+1)^2} \quad (y > 0)$*]*

Esercizio 0.101 ***Si consideri una v.c. bidimensionale*** (X,Y) ***con funzione densità congiunta***

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right] \qquad -\infty < x, \quad y < \infty$$

si ricavi $P(X,Y)$ ***nel dominio:*** $x^2 + y^2 \leq a^2$ ***(cerchio di raggio*** a***).***
[R. $P(X,Y) = 1 - e^{-(a^2/2\sigma^2)}$*]*

Esercizio 0.102 ***Si supponga di scegliere casualmente un punto Q nel dominio interno ad una circonferenza di raggio R (vedi figura (2)). Se il centro della circonferenza indica l'origine e definiamo X, Y come coordinate del punto prescelto potremo rappresentare la funzione densità congiunta così:***

$$f(x,y) = \begin{cases} \boldsymbol{K} & \textbf{\textit{se}} \quad x^2 + y^2 \leq R^2 \\ \\ \boldsymbol{0} & \textbf{\textit{se}} \quad x^2 + y^2 > R^2 \end{cases} \qquad K = \textbf{\textit{costante}}$$

che è una v.c. bidimensionale distribuita uniformemente su un cerchio di raggio R***. In tale caso si chiede***

a) calcolare K***;***

b) ricavare le funzioni densità marginali $f_X(x)$***,*** $f_Y(y)$ ***di*** X ***e*** Y***;***

c) calcolare la probabilità che la distanza dall'origine del punto Q casualmente scelto non sia maggiore di a***.***

Supposto, poi, $R = 1$ ***(circonferenza di raggio unitario) si chiede:*** X ***e*** Y ***sono indipendenti?*** X ***e*** Y ***sono correlate?***

[R. a) $K = 1/\pi R^2$*;*
b)$f_X(x) = \frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - x^2}$ *per* $|x| \leq R$ *e 0 per* $|x| > R$*;*

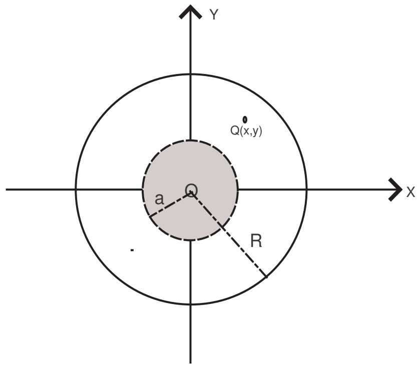

Figura 2: *La circonferenza di raggio R*

$f_Y(y) = \frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - y^2}$ per $|y| \le R$ e 0 per $|y| > R$;
c) $P = a^2/R^2$;
d) X e Y non sono correlate e non sono indipendenti]

Esercizio 0.103 ***La funzione densità congiunta di una v.c. bidimensionale (X, Y) è data da***

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \exp\left[-\frac{2}{3}(x^2 - xy + y^2)\right]$$

a) si ricavino le medie e le varianze di X e Y;

b) si determini il coefficiente di correlazione ρ di X e Y.

[R. a) $E(X) = E(Y) = 0$, $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 1$; b) $\rho = \frac{1}{2}$]

Funzioni di variabili casuali

Esercizio 0.104 ***Siano X e Y due variabili casuali definite da***

$$X = \cos\theta \qquad , \qquad Y = \sin\theta$$

ove θ è una v.c. uniformemente distribuita su $(0, 2\pi)$. Verificare che X e Y non sono correlate.

[R. Si calcoli la covarianza σ_{XY} e si verifichi che è uguale a zero.]

Esercizio 0.105 ***Sia $Y = aX + b$ (con a, b fattori non aleatori).***
Si chiede
a) calcolare la covarianza σ_{XY} di X e Y;
b) calcolare il coefficiente di correlazione r_{XY} di X ed Y.
[R. a) $\sigma_{XY} = a\sigma_X^2$; b) $r_{XY} = a/|a|$]

Esercizio 0.106 ***Si consideri la seguente funzione di v.c.***

$$Y = aX + b \qquad \textbf{\textit{(a,b fattori non aleatori e a}} \neq 0\textbf{\textit{)}}$$

Si chiede di determinare la funzione di ripartizione di Y (cioè G(y)) supposta nota F_X***, cioè, la funzione di ripartizione di X.***
[R. $G(y) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$ *(per* $a > 0$*) e* $G(y) = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$ *(per* $a < 0$*)]*

Esercizio 0.107 ***Sia*** $Y = X^2$***. Si ricavi la funzione densità di*** Y ***supposta nota quella di*** X.
[R. $g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X(\sqrt{y}) + (f_X(-\sqrt{y})\right]$ *(con* $y > 0$*)]*

Esercizio 0.108 ***Sia*** $Y = \sin X$***, dove*** X ***è distribuita uniformemente su*** $(0, 2\pi)$***. Si ricavi la funzione densità di*** Y***.***
[R. $g(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$ *con* $y \in (0,1)$ *caso* $y > 0$*;*
$g(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$ *con* $y \in (-1,0)$ *caso* $y < 0$ *]*

Esercizio 0.109 ***La variabile casuale*** X ***è distribuita uniformemente nell'intervallo [1 , 2]. Sia assegnata la funzione***

$$Y = 4X - 1$$

Determinare la funzione di ripartizione $G(y)$ ***di*** Y.

$$[R.\ G(y) = \begin{cases} 0 & per\ y < 3 \\ \dfrac{y-3}{4} & per\ 3 \leq y \leq 7 \quad] \\ 1 & per\ y > 7 \end{cases}$$

Esercizio 0.110 ***È assegnata la funzione lineare***

$$Y = aX + b \quad (a, b \text{ variabili non aleatorie})$$

Si supponga, poi, che X ***sia distribuita normalmente con funzione densità***

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

Determinare la funzione densità $g(y)$ ***della v.c.*** Y***.***

[R. $g(y) = \frac{1}{|a|\sigma_x\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{[y-(am_x+b)]^2}{2a^2\sigma_x^2}}$ *]*

Esercizio 0.111 ***Comporre la legge normale di densità***

$$f_1(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\ e^{-\dfrac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \qquad (con - \infty < x < \infty)$$

con la legge uniforme di densità

$$f_2(y) = \frac{1}{\beta-\alpha}\,, \qquad (con\ \ \alpha < y < \beta).$$

***Si supponga che** X **e** Y **siano indipendenti**.*

[R. $g(z) = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{[y-(z-m_x)]^2}{2\sigma_x^2}} dy$ *]*

Esercizio 0.112 ***Le variabili aleatorie** X **e** Y **sono indipendenti e distribuite uniformemente nell'intervallo** $[0,1]$**. Si chiede di determinare la funzione densità della v.c.** $Z = X + Y$**.***

$$[R.\ F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \dfrac{z^2}{2} & 0 < z < 1 \\ 1 - \dfrac{(2-z)^2}{2} & 1 < z < 2 \\ 1 & z > 2. \end{cases} \Rightarrow f_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ z & 0 < z < 1 \\ 2 - z & 1 < z < 2 \\ 0 & z > 2. \end{cases}\ ]$$

Esercizio 0.113 ***Siano** X **e** Y **due v.c. esponenziali indipendenti, con parametri, rispettivamente,** α **e** β**. Si ricavi la funzione densità di***
a) $Z = X - Y$
b) $Z = X/Y$
c) $Z = max(X, Y)$
d) $Z = min(X, Y)$

[R. a) $f(z) = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}e^{\beta z}$ *(per* $z \leq 0$*) e* $f(z) = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}e^{-\alpha z}$ *(per* $z > 0$*) ;*
b) $f(z) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha z+\beta)^2}$ *(per* $z > 0$*) e* $f(z) = 0$ *(per* $z \leq 0$*) ;*
c) $f(z) = \alpha e^{-\alpha z}\left(1 - e^{-\beta z}\right) + \beta e^{-\beta z}\left(1 - e^{-\alpha z}\right)$ *per* $z > 0$ *e* $f(z) = 0$ *per* $z \leq 0$*;*
d) $f(z) = (\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}$ *per* $z > 0$ *e* $f(z) = 0$ *per* $z \leq 0$ *]*

Esercizio 0.114 ***Un commerciante sa che il numero di articoli di una determinata marca che può vendere in un giorno è una variabile di Poisson di media 4. Valutare il numero** $\mathcal{N}$ **di articoli che dovrebbe immagazzinare per essere certo al 95% che gli basteranno per 25 giorni.***
[R. $\mathcal{N} \geq 117$*]*

Esercizio 0.115 ***Siano*** $X_1, X_2, ..., X_{15}$ ***v.c. identicamente distribuite (con eguale valore medio e varianza) e con legge di densità***

$$f(x) = \begin{cases} 3(1-x)^2 & \textbf{\textit{se}} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Utilizzando il teorema limite centrale, si chiede di calcolare la probabilità che la media aritmetica delle v.c. assegnate sia inclusa tra 1/8 e 3/8. *[R.* $P \simeq 0.9876$ *]*