Convergenza in probabilità

Si dice che la successione X_n **converge in probabilità** alla v.a. X e si scrive:

$$X_n \xrightarrow{p} X \quad \text{oppure} \quad p\lim X_n = X$$

se, per qualsiasi $\varepsilon > 0$, si ha:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|X_n - X\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Convergenza in media quadratica

Si dice che la successione X_n **converge in media quadratica** alla v.a. X e si scrive:

$$X_n \xrightarrow{m} X$$

se:

$$\lim_{n\to\infty} E\left(X_n - X\right)^2 = 0$$

Convergenza quasi certa

Si dice che la successione X_n **converge quasi certamente** alla v.a. X e si scrive:

$$X_n \xrightarrow{qc} X$$

se:

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\left|X_n - X\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Leggi dei grandi numeri

Per **leggi dei grandi numeri** si intendono un insieme di teoremi concernenti la convergenza di una successione di v.a. ad una **costante**.
Tali leggi si definiscono **deboli** se la successione converge **in probabilità** alla costante, si definiscono, invece, **forti** se la successione converge **quasi certamente** alla costante.

Teorema limite centrale

Trattasi di un gruppo di risultati teorici che mostrano, sotto una serie di condizioni, la **convergenza** alla **v.a. normale** della **somma** (e quindi della **media**) di v.a. di qualsiasi tipo.

Si consideri una successione X_n di v.a. identicamente distribuite con valore medio $E(X_n) = \mu$ e varianza $Var(X_n) = \sigma^2 < +\infty$, la v.a. somma S_n ha valore medio e varianza:

$$E(S_n) = n\mu;\ Var\,(S_n) = n\sigma^2$$

che, per n tendente ad infinito, assumono valori infiniti.

Invece, la v.a. **somma standardizzata**:

$$Z_n = \frac{S_n - E\left(S_n\right)}{\sqrt{Var\left(S_n\right)}} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

ha valore medio e varianza, rispettivamente, pari a:

$$E(Z_n) = 0;\ Var\,(Z_n) = 1$$

Il **teorema limite centrale**, o **teorema centrale limite**, presenta alcune versioni che differiscono tra loro per le condizioni imposte sempre meno restrittive.
Una prima formulazione, già utilizzabile in molte situazioni, è dovuta a De Moivre - Laplace.

Teorema limite centrale (De Moivre - Laplace)

La v.a. S_n somma di v.a. X_n statisticamente indipendenti e identicamente distribuite, con $E(X_n) = p$ e $Var\,(X_n) = p(1-p)$, converge in distribuzione ad una v.a. normale standardizzata. In simboli:

$$Z_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

Applicazioni del teorema limite centrale

1. La **media** di n v.a. **uniformi** per $n \geq 2$ presenta distribuzioni unimodali e simmetriche che tendono velocemente alla distribuzione di una v.a. normale standardizzata.
2. Data una v.a. **binomiale** $X \sim Bin(n, p)$ in quanto **somma di *n* v.a. di Bernoulli** di parametro p, se n è grande e p non è prossimo allo zero, la v.a. X può essere approssimata da una distribuzione normale standardizzata:

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

3. Data una v.a. di **Poisson**, $X \sim Po(\lambda)$, X converge in distribuzione ad una v.a. normale e se λ è grande (per alcuni autori deve essere $\lambda \geq 18$) X può essere approssimato da una v.a. normale avente valore medio λ e varianza λ.
4. La v.a. **chi - quadrato** è data dalla somma di v.a. normali standardizzate e indipendenti al quadrato.

La tabella a pagina seguente riporta, per ciascuna delle v.a. continue esaminate, la funzione di densità, il valore medio, la varianza, l'indice di asimmetria e l'indice di curtosi.

Tabella di variabili aleatorie continue

Distribuzioni	$f(x)$	Domini	$E(X)$	
Uniforme	$\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{per } a \le x \le b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$	$-\infty < a < x$ $x \le b < +\infty$	$\dfrac{a+b}{2}$	
Esponenziale negativa	$\begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x \le 0 \end{cases}$	$-\infty < x < +\infty$	$\dfrac{1}{\lambda}$	
Gamma	$\dfrac{\lambda^{\beta}}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} \exp(-\lambda x)$	$x > 0$ $\beta > 0$	$\dfrac{\beta}{\lambda}$	
Normale	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ \dfrac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$	$-\infty < x < +\infty$ $-\infty < \mu < +\infty$ $\sigma > 0$	μ	
Chi-quadrato	$\dfrac{1}{2^{\frac{g}{2}} \Gamma\left(\frac{g}{2}\right)} \exp\left(-\dfrac{x}{2}\right) x^{\frac{g}{2}-1}$	$x \ge 0$ $g = 1,2,\ldots$	g	
***t* di Student**	$\dfrac{\Gamma\left(\frac{g+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi g}\, \Gamma\left(\frac{g}{2}\right)} \left(1 + \dfrac{x^2}{g}\right)^{-\frac{(g+1)}{2}}$	$-\infty < x < +\infty$ $g > 0$	0 per $g > 1$	
***F* di Fisher**	$\dfrac{\Gamma[(g_1+g_2)/2]}{\Gamma(g_1/2)\Gamma(g_2/2)} (g_1/g_2)^{g_1/2} \dfrac{x^{(g_1/2)-1}}{\left(1 + \frac{g_1}{g_2} x\right)^{(g_1+g_2)/2}}$	$x > 0$ $g_1, g_2 = 1,2,\ldots$	$\dfrac{g_2}{g_2-2}$ per $g_2 > 2$	

	$Var(X)$	$Asym(X)$	$Kurt(X)$
	$\frac{(b-a)^2}{12}$	0	1,8
	$\frac{1}{\lambda^2}$	2	9
	$\frac{\beta}{\lambda^2}$	$\frac{2}{\sqrt{\beta}}$	$3+\frac{6}{\beta}$
	σ^2	0	3
	$2g$	$\sqrt{\frac{8}{g}}$	$3+\frac{12}{g}$
	$\frac{g}{g-2}$ per $g>2$	0	$3+\frac{6}{g-4}$ per $g>4$
	$\frac{2(g_2)^2(g_1+g_2-2)}{g_1(g_1-2)^2(g_2-4)}$ per $g_2>4$	$\frac{2g_1+g_2-2}{g_2-6}\sqrt{\frac{8(g_2-4)}{g_1(g_1+g_2-2)}}$ per $g_2>6$	$3\frac{\left[g_2-4+\frac{g_2-6}{2}\beta_1\right]}{g_2-8}$ per $g_2>8$

Esercizio n. 3.2.1

La durata di una batteria al litio è una v.a. continua X avente funzione di ripartizione:

$$F(x) = 1 - \exp(-\lambda t)$$

con λ costante reale positiva e t espresso in anni.

Determinare, sapendo che la durata media di una batteria è 3 anni:

a) la probabilità che la batteria duri più di 1 anno;

b) la varianza della v.a. X ricorrendo all'espressione:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Risoluzione

Per rispondere ai due quesiti è necessario, innanzi tutto, calcolare il valore di λ.

Poiché, per una v.a. esponenziale negativa $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, si ha che:

$$\lambda = \frac{1}{3}$$

a) La probabilità che la batteria duri più di 1 anno è:

$$P(X > 1) = 1 - P(X \le 1) = 1 - F(1) = 1 - \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{3}\right)\right] \cong 0{,}7165$$

b) La varianza della v.a. esponenziale negativa X è pari a:

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

tuttavia, il quesito richiede l'uso dell'espressione generale della varianza di una v.a. che, a sua volta, può essere calcolata ricorrendo alla funzione generatrice dei momenti avente espressione analitica:

$$G(t) = E\left(\exp(tx)\right) = \int_0^{+\infty} \exp(tx) f(x)\,dx$$

ossia:

$$G(t) = E\left(\exp(tx)\right) = \int_0^{+\infty} \exp(tx)\lambda \exp(-\lambda x)\,dx = \lambda \int_0^{+\infty} \exp\{-(\lambda - t)x\}\,dx =$$

$$= -\frac{\lambda}{\lambda - t}\left[\exp\{-(\lambda - t)x\}\right]_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

per cui nell'espressione della varianza si ha:

$$E(X^2) = \frac{d^2}{dt^2} G(t)\Big|_{t=0} = \frac{d^2}{dt^2}\frac{\lambda}{\lambda - t} = \frac{2\lambda}{(\lambda - 0)^3} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Mentre:

$$[E(X)]^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

da cui:

$$Var(X)=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$$

che, sostituendo il valore di λ, diviene:

$$Var(X)=\frac{1}{\lambda^2}=9$$

Esercizio n. 3.2.2

Sia data una v.a. X rappresentante il tempo di funzionamento di un componente con funzione di densità:

$$f(x)=0{,}5\exp(-0{,}5x)$$

dove x rappresenta il numero di anni.

Determinare la probabilità che il componente si guasti prima di raggiungere la vita media.

Risoluzione

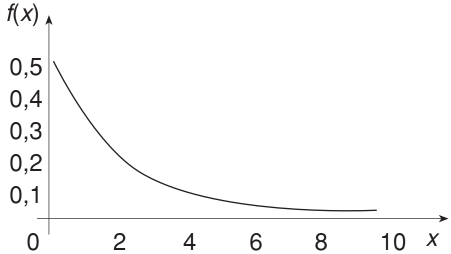
La vita media di tale variabile è espressa da:

$$\frac{1}{0{,}5}=2$$

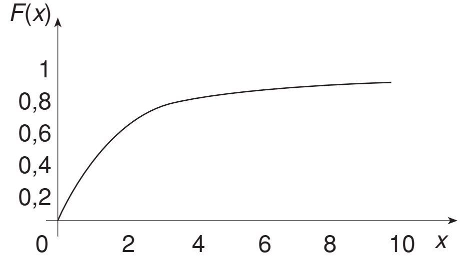
Pertanto, la probabilità richiesta è data da:

$$F(2)=P(0\le X\le 2)=\int_0^2 0{,}5\exp(-0{,}5x)dx=0{,}5\left[\frac{\exp(-0{,}5x)}{-0{,}5}\right]_0^2=-\left[\exp(-0{,}5\cdot 2)-\exp(0)\right]=$$
$$=-\left[\exp(-1)-1\right]=1-\frac{1}{e}$$

A tale risultato si sarebbe giunti per qualsiasi valore di λ.



Funzione di densità della v.a. En (0,5)



Funzione di ripartizione della v.a. En (0,5)

Esercizio n. 3.2.3

In un dato ufficio postale i tempi di attesa (espressi in centinaia di minuti) allo sportello seguono la v.a. esponenziale negativa con parametro $\lambda = 0{,}04$.
Determinare la probabilità che un individuo attenda allo sportello meno di 35 minuti.

Risoluzione

Dire che il parametro λ è pari a 0,04 equivale a dire che i tempi medi di attesa sono pari a $\frac{1}{0{,}04} = 25$ minuti.

Pertanto, la probabilità che un individuo attenda allo sportello meno di 35 minuti, applicando la formula della funzione di ripartizione della variabile è:

$$P(X \leq 0{,}35) = 1 - e^{(-0{,}04 \cdot 0{,}35)} = 1 - 0{,}9860975 = 0{,}0139025$$

in cui si è indicato con 0,35 il tempo espresso in centinaia di minuti.

Esercizio n. 3.2.4

I valori di due dati di una distribuzione sono $x_1 = 130$ e $x_2 = 138$, e i loro valori standard sono, rispettivamente $z_1 = -0{,}9375$ e $z_2 = 0{,}3125$.
Determinare la media e lo scarto quadratico medio della distribuzione.

Risoluzione

Per definizione, il valore standard è:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Essendo noti z_1 e z_2 e x_1 e x_2, le incognite μ e σ si determinano dal sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{130 - \mu}{\sigma} = -0{,}9375 \\ \dfrac{138 - \mu}{\sigma} = 0{,}3125 \end{cases}$$

da cui $\mu = 136$ e $\sigma = 6{,}4$.

Esercizio n. 3.2.5

Una distribuzione di dati ha media e scarto quadratico medio, rispettivamente uguali a:

$$\mu = 235 \quad \text{e} \quad \sigma = 49{,}5$$

Determinare i valori standard dei seguenti valori:

a) 385;
b) 254;
c) 198;
d) 334.

Risoluzione

La variabile standardizzata è:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

da cui:

a) $z = \frac{385 - 235}{49,5} = 3,03$

b) $z = \frac{254 - 235}{49,5} = 0,38$

c) $z = \frac{198 - 235}{49,5} = -0,75$

d) $z = \frac{334 - 235}{49,5} = 2$

Esercizio n. 3.2.6

Determinare la probabilità:

$$P(-0,25 < Z \leq 0,75)$$

Risoluzione

Per determinare questa probabilità si può utilizzare la Tavola 1 che fornisce i valori di $\Phi(Z = z)$ (funzione di ripartizione) in corrispondenza dei diversi valori assunti da Z.

Inoltre, è necessario tener conto che, in generale, si ha:

$$P(z_1 < Z \leq z_2) = \Phi(Z = z_2) - \Phi(Z = z_1)$$

La probabilità $P(-0,25 < Z < 0,75)$ è:

$$\Phi(0,75) - \Phi(-0,25)$$

Per ricercare il valore $\Phi(0,75)$ sulla tavola della v.a. standardizzata è necessario procedere lungo la colonna verticale segnata z fino al valore 0,7; poi si procede fino alla colonna orizzontale segnata 5 si legge così il valore 0,77337.

Per determinare il valore $\Phi(-0,25)$ è necessario tener conto che, per la simmetria della normale standardizzata:

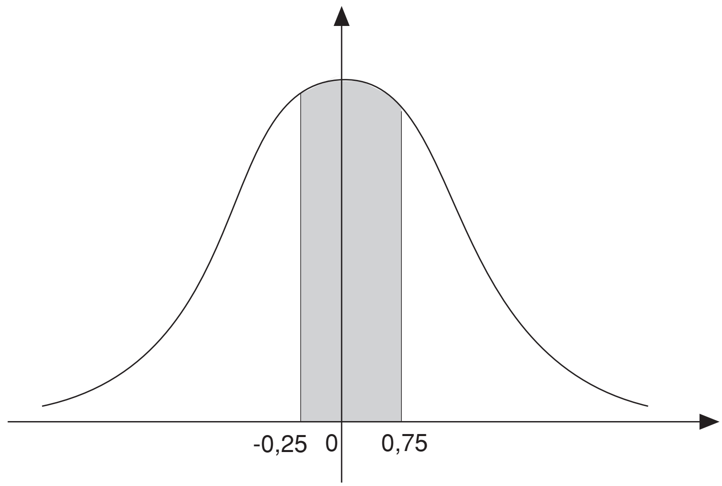
$$\Phi(-0,25) = 1 - \Phi(0,25)$$

Infatti, la Tavola 1 ci fornisce solo le probabilità $P(Z \leq z)$, cioè le probabilità alla sinistra dei valori considerati e solo per valori positivi. Siccome l'area alla sinistra di –0,25 è uguale all'area alla destra di +0,25, calcoliamo quest'ultima.
Quindi va ricercato sulla tavola, con il procedimento già visto, il valore $\Phi(0,25)$ che è pari a 0,59871; per cui $\Phi(0,25) = 1 - 0,59871 = 0,40129$.

Da cui abbiamo:

$$P(-0,25 \leq Z \leq 0,75) = 0,77337 - 0,40129 = 0,37208$$

Graficamente tale probabilità corrisponde all'area più scura al di sotto della funzione di ripartizione:



Esercizio n. 3.2.7

Facendo uso della Tavola 1 in Appendice determinare le seguenti probabilità:

a) $P(Z \leq 0{,}4)$;
b) $P(Z > 1{,}99)$;
c) $P(0 \leq Z \leq 2{,}85)$;
d) $P(-1{,}54 < Z < 0)$;
e) $P(-2{,}33 < Z < 0{,}4)$;
f) $P(0{,}5 < Z < 2{,}58)$;
g) $P(-1{,}43 < Z < -0{,}94)$.

Risoluzione

La Tavola 1 in Appendice fornisce i valori della probabilità

$$P(Z \leq z) = \Phi(Z = z)$$

Pertanto si ha:

a) $P(Z \leq 0{,}4) = \Phi(0{,}4) = 0{,}65542$;

b) $P(Z > 1{,}99) = 1 - P(Z \leq 1{,}99) = 1 - \Phi(1{,}99) = 1 - 0{,}97670 = 0{,}0233$;

c) $P(0 \leq Z \leq 2{,}85) = P(Z \leq 2{,}85) - P(Z \leq 0) = \Phi(2{,}85) - \Phi(0) = 0{,}99781 - 0{,}5 = 0{,}49781$;

d) $P(-1{,}54 < Z < 0) = P(0 < Z < 1{,}54) = \Phi(1{,}54) - \Phi(0) = 0{,}93822 - 0{,}5 = 0{,}43822$;

e) $P(-2{,}33 < Z < 0{,}4) = P(Z < 0{,}4) - [1 - P(Z < 2{,}33)] = \Phi(0{,}4) - [1 - \Phi(2{,}33)] = 0{,}65542 - [1 - 0{,}99010]$ $= 0{,}64552$;

f) $P(0{,}5 < Z < 2{,}58) = P(Z < 2{,}58) - P(Z < 0{,}5) = \Phi(2{,}58) - \Phi(0{,}5) = 0{,}99506 - 0{,}69146 = 0{,}3036$;

g) $P(-1{,}43 < Z < -0{,}94) = P(Z < 1{,}43) - P(Z < 0{,}94) = \Phi(1{,}43) - \Phi(0{,}94) = 0{,}92364 - 0{,}82639 =$ $= 0{,}09725$.

Esercizio n. 3.2.8

Le monete di un collezionista presentano un diametro distribuito normalmente con media 2 cm e scarto quadratico medio 0,8928.
Determinare la probabilità che ci sia una moneta con un diametro al massimo pari a 3 cm.

Risoluzione

Per determinare la probabilità richiesta è necessario calcolare il valore standardizzato:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{3-2}{0{,}8928} = 1{,}12$$

da cui:

$$P(Z \leq 1{,}12) = 0{,}86864$$

Esercizio n. 3.2.9

Una ditta confeziona pomodori in scatola il cui peso è distribuito come una normale con media uguale a 500 gr e scarto quadratico medio pari a 8 gr.

Determinare la probabilità che:

a) ci sia una scatola con un peso compreso tra 480 e 490 gr;
b) il peso di una scatola differisca dalla media per più di 20 gr.

Risoluzione

a) Si deve calcolare la probabilità:

$$P(480 \leq X \leq 490)$$

standardizzando si ottiene:

$$P\left[\frac{(480-\mu)}{\sigma} \leq Z \leq \frac{(490-\mu)}{\sigma}\right] = P\left[\frac{(480-500)}{8} \leq Z \leq \frac{(490-500)}{8}\right] = P(-2{,}5 \leq Z \leq -1{,}25)$$

Tenendo conto della simmetria della distribuzione normale si ha:

$$\Phi(-1{,}25) - \Phi(-2{,}5) = \Phi(2{,}5) - \Phi(1{,}25)$$

Ricorrendo alla Tavola 1 si ha:

$$\Phi(2{,}5) - \Phi(1{,}25) = 0{,}99379 - 0{,}89435 = 0{,}09944$$

b) Dovendo calcolare la probabilità che il peso di una scatola differisca dal valore medio per più di 20 gr si dovrà calcolare la probabilità che il peso di una scatola differisca in più o in meno rispetto al suo valore medio cioè che superi 520 gr o che sia inferiore a 480 gr. Essendo la curva normale simmetrica rispetto al suo valore medio è sufficiente calcolare una delle due probabilità e poi moltiplicarla per due.

Si calcola allora:

$$P[(X-500) \geq 20] = P(X \geq 520) = P\left[Z \geq \frac{(520-500)}{8}\right] = P(Z \geq 2{,}5) = 1 - \Phi(2{,}5) =$$
$$= 1 - 0{,}99379 = 0{,}00621$$

Per la simmetria della normale moltiplichiamo per due e otteniamo:

$$0{,}00621 \cdot 2 = 0{,}01242$$

C'è una probabilità pari all'1,242% di trovare una scatola il cui peso differisca dal valore medio per più di 20 gr.

Esercizio n. 3.2.10

Le altezze dei giocatori delle squadre di calcio di un campionato sono distribuite normalmente con media 178 cm e scarto quadratico medio 8 cm.

Determinare:

a) la probabilità che un giocatore abbia altezza inferiore a 170 cm;
b) la probabilità che un giocatore abbia altezza superiore a 190 cm.

Risoluzione

Per determinare le probabilità richieste è necessario calcolare i valori standardizzati.

a) Il valore standardizzato che corrisponde a 170 cm è:

$$Z = \frac{170 - 178}{8} = -1$$

Per la simmetria della curva è:

$$P(Z < -1) = P(Z > 1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0{,}84134 = 0{,}15866$$

b) Il valore standardizzato che corrisponde a 190 cm è:

$$Z = \frac{190 - 178}{8} = 1{,}5$$

Dalla Tavola 1 in Appendice si evince che:

$$P(Z > 1{,}5) = 1 - P(Z < 1{,}5) = 1 - 0{,}93319 = 0{,}06681$$

Esercizio n. 3.2.11

Il 2,275% dei bambini di una scuola materna ha un peso minore o uguale a 15 kg, anche un altro 2,275% ha un peso maggiore o uguale a 29 kg.

Determinare:

a) μ e σ;
b) la percentuale di bambini con un peso minore o uguale a 13,25 kg.

Risoluzione

a) Sia X la variabile *Peso dei bambini*, in termini di probabilità il testo dell'esercizio può essere espresso nel modo seguente:

$$P(X \leq 15) = 0{,}02275$$

$$P(X \geq 29) = 0{,}02275$$

in termini di variabili standardizzate:

$$P\left(Z \leq \frac{15-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}02275$$

$$P\left(Z \geq \frac{29-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}02275$$

La Tavola 1 fornisce i valori di Z per cui:

$$P(Z \leq z)$$

per cui in termini dell'esercizio dato si ha:

$$P\left(Z \leq \frac{15-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}02275 = 1 - 0{,}97725$$

$$P\left(Z \geq \frac{29-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}02275 = 1 - 0{,}97725$$

cui corrispondono nella Tavola rispettivamente, i valori di $Z_1^* = -2$ e $Z_2^* = 2$.

Sostituendo risulta il sistema di 2 equazioni nelle due incognite μ e σ:

$$\begin{cases} \dfrac{15-\mu}{\sigma} = -2 \\ \dfrac{29-\mu}{\sigma} = 2 \end{cases}$$

da cui si ricavano facilmente i valori $\mu = 22$ e $\sigma = 3{,}5$.

b) La percentuale di bambini con un peso minore o uguale a 13,25 kg, si esprime in termini di probabilità nel modo seguente:

$$P\left(Z \leq \frac{13{,}25-22}{3{,}5}\right) = P(Z \leq -2{,}5) = 1 - P(Z \leq 2{,}5) = 1 - \Phi(2{,}5) = 1 - 0{,}99379 = 0{,}00621$$

Esercizio n. 3.2.12

La resistenza a trazione X di un lattice in gomma naturale è del tipo:

$$X \sim N(30,\ 1{,}5^2)$$

è, cioè, distribuita normalmente con media $\mu = 30$ *MPA* e deviazione standard $\sigma = 1{,}5$ *MPA*.
Un individuo decide di acquistare il lattice solo se lo stesso presenta una resistenza di almeno 28,5*MPa*.
Determinare la probabilità che il lattice rientri nelle specifiche.

Risoluzione

La probabilità richiesta può essere espressa formalmente nel modo seguente:

$$P(X \leq 28{,}5)$$

che, procedendo alla standardizzazione di X, diviene:

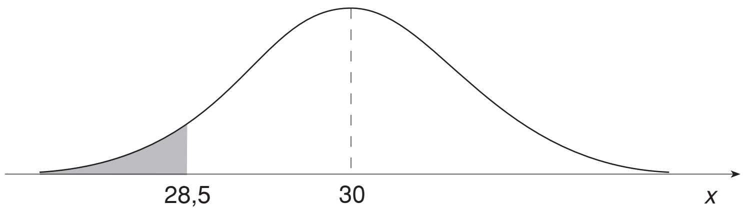
$$P(X \geq 28{,}5) = P\left(Z \geq \frac{28{,}5-30}{1{,}5}\right) = P(Z \geq -1) = \Phi(-1)$$

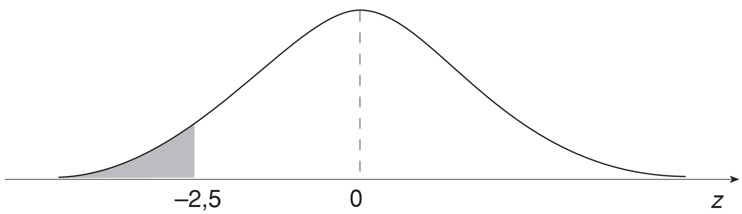
che, per la simmetria della distribuzione normale standardizzata, è uguale a:

$$\Phi(-1) = 1 - \Phi(1)$$

Dalla Tavola 1 in Appendice si ha:

$$\Phi(1) = 1 - 0{,}84134 = 0{,}15866$$





Aree sottostanti la curva normale e la curva normale standardizzata, relative a pezzi non conformi

Esercizio n. 3.2.13

Dimostrare che l'integrale della funzione di densità della v.a. normale è pari a 1.

Risoluzione

Utilizzando la proprietà di simmetria della funzione e la trasformazione $t = \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$, si ha:

$$x = \mu + t^{\frac{1}{2}}\sigma\sqrt{2}$$

Per cui:

$$dx = t^{-\frac{1}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{2}}dt$$

La funzione di ripartizione della v.a. normale è:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right\}dx = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \int_0^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right\}dx$$

che, tenendo conto della trasformazione, diviene:

$$\frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\exp(-t)t^{-\frac{1}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{2}}dt = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}\exp(-t)t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\exp(-t)t^{-\frac{1}{2}}dt$$

che, tenendo conto della proprietà della funzione Gamma, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, è pari a:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}=1$$

Esercizio n. 3.2.14

Facendo uso della Tavola 2 in Appendice determinare i valori della probabilità α per cui:

a) $P(0 < \chi^2 < 43{,}773) = 1 - \alpha$ con 30 gradi di libertà;
b) $P(0 < \chi^2 < 66{,}766) = 1 - \alpha$ con 40 gradi di libertà.

Risoluzione

I valori della probabilità si calcolano scorrendo lungo la riga dei gradi di libertà dati in modo da individuare il valore di $\chi^2_{\alpha,\,n-1}$, e quindi salendo lungo la colonna incrociata.

a) $\chi^2_{\alpha;\,30} = 43,\,773 \Rightarrow \alpha = 0{,}05$;
b) $\chi^2_{\alpha;\,40} = 66{,}766 \Rightarrow \alpha = 0{,}005$.

Esercizio n. 3.2.15

Facendo uso della Tavola 2 in Appendice determinare i valori di $\chi^2_{\alpha,\,n-1}$ tali che:

a) $P(0 < \chi^2 < \chi^2_{0,005;\,14}) = 0{,}995$;
b) $P(0 < \chi^2 < \chi^2_{0,0025;\,29}) = 0{,}9975$.

Risoluzione

I valori di $\chi^2_{\alpha,\,n-1}$ si determinano in corrispondenza dell'incrocio tra la riga di gradi di libertà dati e la colonna della probabilità α.

a) $\chi^2_{0,005;\,14} = 31{,}319$;
b) $\chi^2_{0,0025;\,29} = 54{,}967$.

Esercizio n. 3.2.16

Facendo uso della Tavola 3 in Appendice, determinare i valori di $t_{\alpha;\,n-1}$ tali che:

a) $P(t > t_{0,05;\,30}) = 0{,}05$;
b) $P(t > t_{0,001;\,21}) = 0{,}001$.

Risoluzione

I valori di $t_{\alpha;\,n-1}$ si leggono nella tabella all'incrocio tra il numero di gradi di libertà dati e i valori dell'area (α) in una coda.

a) $t_{0,05;\,30} = 1{,}697$;
b) $t_{0,001;\,21} = 3{,}527$.

Esercizio n. 3.2.17

Facendo uso della Tavola 3 in Appendice, determinare i valori di $t_{\alpha; n-1}$ tali che:

a) $P(-\infty < t < t_{0,005;\,18}) = 0,995$;

b) $P(-\infty < t < t_{0,025;\,5}) = 0,975$.

Risoluzione

I valori di $t_{\alpha; n-1}$ si desumono dalla Tavola in corrispondenza dell'incrocio tra i gradi di libertà dati e il valore dell'area (α) in una coda.

a) $t_{0,05;\,18} = 2,878$;

b) $t_{0,025;\,5} = 2,571$.

Esercizio n. 3.2.18

Facendo uso della Tavola 3 in Appendice determinare i valori di α tali che:

a) $t_{\alpha;\,27} = 3,057$;

b) $t_{\alpha;\,11} = 2,328$.

Risoluzione

I valori della probabilità α si evincono dalla Tavola scorrendo lungo la riga dei gradi di libertà dati in modo da individuare il valore di $t_{\alpha;\,n-1}$ esposto nel testo, quindi salendo lungo la colonna in corrispondenza del valore dell'area in una coda.

a) $t_{\alpha;\,27} = 3,057 \Rightarrow \alpha = 0,0025$;

b) $t_{\alpha;\,11} = 2,328 \Rightarrow \alpha = 0,020$.

Esercizio n. 3.2.19

Facendo uso della Tavola 3 in Appendice, determinare i valori di $t_{\alpha/2;\,n-1}$ tali che:

a) $P(-t_{0,02;\,15} < t < t_{0,02;\,15}) = 0,96$;

b) $P(-t_{0,005;\,70} < t < t_{0,005;\,70}) = 0,99$.

Risoluzione

Il valore di $t_{\alpha/2;\,n-1}$ è in corrispondenza dell'area nelle due code, ottenuta moltiplicando il valore di $\alpha/2$ per 2.

a) $t_{0,02;\,15} = 2,249$;

b) $t_{0,005;\,70} = 2,648$.

Esercizio n. 3.2.20

Facendo uso delle Tavola 4 in Appendice determinare i valori $F_{0,05;g_1;g_2}$:

a) $F_{0,05;\,4;\,5}$;

b) $F_{0,05;\,40;\,6}$;

c) $F_{0,05;\,24;\,5}$.

Risoluzione

I valori $F_{\alpha;g_1;g_2}$ per $\alpha = 0,05$ si trovano nelle caselle in corrispondenza dell'incrocio tra la colonna contrassegnata dai gradi di libertà al numeratore (g_1) e la riga contrassegnata dai gradi di libertà al denominatore (g_2), e sono nella prima riga della casella.

a) $F_{0,05;\,4;\,5} = 5,19$;

b) $F_{0,05;\,40;\,6} = 3,77$;

c) $F_{0,05;\,24;\,5} = 4,53$.

Esercizio n. 3.2.21

Facendo uso della Tavola 4 in Appendice determinare i valori $F_{0,01;g_1;g_2}$:

a) $F_{0,01;\,10;\,10}$;

b) $F_{0,01;\,30;\,10}$;

c) $F_{0,01;\,75;\,15}$.

Risoluzione

I valori $F_{0,01;g_1;g_2}$ si trovano seguendo il procedimento spiegato nell'esercizio n. 3.2.20, solo che essi si individuano nella seconda riga di ciascuna casella.

a) $F_{001;\,10;\,10} = 4,85$;

b) $F_{0,01;\,30;\,10} = 4,25$;

c) $F_{0,01;\,75;\,15} = 3,00$.

Esercizio n. 3.2.22

Facendo uso della Tavola 4 in Appendice determinare i valori $F_{1-\alpha;g_1;g_2}$:

a) $F_{0,99;\,12;\,8}$;

b) $F_{0,95;\,12;\,8}$;

c) $F_{0,95;\,6;\,5}$.

Risoluzione

Anche se la Tavola 4 in Appendice non riporta i valori $F_{1-\alpha;g_1;g_2}$ essi sono determinabili ricorrendo alla relazione:

$$F_{1-\alpha;g_1;g_2} = \frac{1}{F_{\alpha;g_2;g_1}}$$

a) $F_{0,99;12;8} = \frac{1}{F_{0,01;8;12}} = \frac{1}{4,50} = 0,222;$

b) $F_{0,95;12;8} = \frac{1}{F_{0,05;8;12}} = \frac{1}{2,85} = 0,351;$

c) $F_{0,95;6;5} = \frac{1}{F_{0,05;5;6}} = \frac{1}{4,39} = 0,228.$

Esercizio n. 3.2.23

Sia data la successione $X_n = (-1)^n X$ con $X \sim N(0,1)$. Dimostrare che X_n converge in distribuzione a X.

Risoluzione

Si dimostra che $X_n \xrightarrow{d} X$ se, per ogni punto in cui $F(x)$ è continua, si ha:

$$F_{X_n}(x) \to F_X(x)$$

dove $F_{X_n}(x)$ e $F_X(x)$ sono, rispettivamente, la funzione di ripartizione di X_n e di X. Si ha, inoltre:

$$F_{X_n}(x) = P(X_n < x) = P\left((-1)^n X < x\right)$$

Se n è pari, allora $(-1)^n = 1$ per cui $X_n = X$ e si ha:

$$F_{X_n}(x) = P(X_n < x) = P(X < x) = F_X(x)$$

Se n è dispari, allora $(-1)^n = -1$ per cui $X_n = -X$ e si ha:

$$F_{X_n}(x) = P(X_n < x) = P(-X < x) = P(X > -x) = P(X < x)$$

ciò per la simmetria di X, per cui:

$$F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

Quindi, per ogni n, si ha che $F_{X_n}(x) = F_X(x)$ e si dice che X_n converge in distribuzione a X.

Esercizio n. 3.2.24

Siano date due v.a. $X \sim N(3,4)$ e $Y \sim N(-1,1)$.

Sapendo che $\rho(X,Y) = 0,3$, calcolare il coefficiente di correlazione lineare:

$$\rho(X-Y, 2X+Y)$$

Risoluzione

Per calcolare il coefficiente richiesto occorre applicare la formula:

$$\rho(X-Y, 2X+Y) = \frac{Cov(X-Y, 2X+Y)}{\sigma_{x-y}\sigma_{2x+y}}$$

Determiniamo, innanzi tutto, i valori dei quadrati degli scarti quadratici medi al denominatore, ossia le varianze delle due combinazioni lineari di v.a.

Si ha:

$$Var(X-Y)=Var(X)+Var(Y)-2\rho(X,Y)\sigma_x\sigma_y=4+1-2\cdot 0{,}3\cdot 2\cdot 1=3{,}8$$

$$Var(2X+Y)=4Var(X)+Var(Y)+2\cdot 2\rho(X,Y)\sigma_x\sigma_y=16+1+4\cdot 0{,}3\cdot 2\cdot 1=19{,}4$$

Inoltre, la covarianza al numeratore è pari a:

$$\begin{aligned}Cov(X-Y,2X+Y)&=2Var(X)+Cov(X,Y)-2Cov(X,Y)-Var(Y)=\\&=2Var(X)-Cov(X,Y)-Var(Y)=8-0{,}3\cdot 2\cdot 1-1=6{,}4\end{aligned}$$

Pertanto, il coefficiente di correlazione lineare richiesto è:

$$\rho(X-Y,2X+Y)=\frac{6{,}4}{\sqrt{3{,}8\cdot 19{,}4}}=0{,}745$$

Prove scritte assegnate

Di seguito proponiamo due esercizi assegnati dal Professor Lucio Torelli all'esame di Statistica del corso di laurea in Biotecnologie presso la facoltà di Medicina e Chirurgia dell'Università degli Studi di Trieste. Il Professore fornisce anche i risultati; in questa sede svolgiamo l'esercizio.

Esercizio n. 1

Un neon su due si brucia entro un periodo di sei mesi se lasciato acceso ininterrottamente. Viene montato un neon su ciascuno degli otto pianerottoli di un palazzo.

Qual è la probabilità che nessun neon si sia bruciato dopo sei mesi?
Qual è la probabilità che si siano bruciati tutti e otto i neon dopo sei mesi?
In media quanti neon mi aspetto che si bruceranno in tale periodo?

[*ca.* 0,4%; …; 4]

Risoluzione

Il numero di *neon che si bruciano* segue una distribuzione binomiale, $X \sim Bin\ (8, 1/2)$, dove 8 indica il numero n di neon mentre 1/2 è la probabilità p che un neon ha di bruciarsi entro un periodo di sei mesi.

La probabilità che nessun neon si sia bruciato dopo sei mesi si ottiene applicando, quindi, la formula:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

da cui:

$$P(X = 0) = \binom{8}{0} 0{,}5^0 (1-0{,}5)^8 = 0{,}00390625$$

che, espressa in termini percentuali, è pari a 0,390625% $\cong$ 0,4%.

Analogamente, la probabilità che si siano bruciati tutti e otto i neon dopo sei mesi si ottiene applicando la stessa formula, da cui:

$$P(X = 8) = \binom{8}{8} 0{,}5^8 (1-0{,}5)^0 = 0{,}00390625$$

ed ha lo stesso valore pari circa allo 0,4%.

Infine, la media dei neon che ci si aspetta si bruceranno nel periodo di sei mesi è pari al valore medio della v.a. binomiale pari a:

$$E(X) = np = 8 \cdot 0{,}5 = 4$$

ESERCIZIO N. 2

Il peso alla nascita dei neonati italiani segue una legge normale di media 3,1 kg e di varianza 0,36 kg. Qual è la probabilità che un neonato scelto a caso abbia peso compreso tra 2,5 kg e 2,7 kg? Qual è la probabilità che un neonato scelto a caso abbia peso minore di 2 kg?

[9,3…%; 3,3…%]

Risoluzione

Per rispondere al primo quesito si deve calcolare la probabilità seguente:

$$P(2{,}5 \leq X \leq 2{,}7)$$

che, in termini di v.a. normale standardizzata, diviene:

$$P\left(\frac{2{,}5-3{,}1}{\sqrt{0{,}36}} \leq Z \leq \frac{2{,}7-3{,}1}{\sqrt{0{,}36}}\right) = P(-1 \leq Z \leq -0{,}67)$$

Considerando che $\Phi(X = x)$ è la funzione di ripartizione della v.a. normale e, tenendo conto della simmetria di tale distribuzione, si ha che:

$$\Phi(-0{,}67) - \Phi(-1) = \Phi(-1) - \Phi(-0{,}67)$$

Ricorrendo ad una tavola della v.a. normale standardizzata si ha che:

$$\Phi(-1) - \Phi(-0{,}67) = 0{,}84134 - 0{,}74857 = 0{,}09277$$

che, espressa in termini percentuali, è pari a 9,277% ≅ 9,3%.

La probabilità che un neonato scelto a caso abbia un peso minore di 2 kg si esprime simbolicamente nel modo seguente:

$$P(X < 2)$$

e, in termini standardizzati:

$$P\left(Z < \frac{2-3{,}1}{\sqrt{0{,}36}}\right) = P(Z < -1{,}83)$$

Ricorrendo ad una tavola della v.a. normale standardizzata si ha che:

$$\Phi(-1{,}83) = 1 - \Phi(1{,}83) = 1 - 0{,}96638 = 0{,}3362$$

che, espressa in termini percentuali, è pari a 3,362%.

Quesiti a scelta multipla

1. **La v.a. $X \sim Ud(45)$ ha valore medio:**

❑ A) $E(X) = 23$
❑ B) $E(X) = 0$
❑ C) $E(X) = 45$

2. **La varianza di una v.a. $X \sim Ber(p)$ è massima se:**

❑ A) $p = 1$
❑ B) $p = 0{,}5$
❑ C) $p = 0{,}2$

3. **La v.a. $X \sim Bin(14, 0{,}4)$ ha varianza:**

❑ A) $Var(X) = 5{,}6$
❑ B) $Var(X) = 3{,}36$
❑ C) $Var(X) = 0{,}4$

4. **La v.a. $X \sim Bin(20, 3)$:**

❑ A) ha valore medio $E(X) = 60$
❑ B) non è ben definita
❑ C) è la somma di 20 v.a. di Bernoulli

5. **Il valore medio della v.a. X avente funzione di densità $f(x) = 0{,}4\exp(-0{,}4x)$ è:**

❑ A) $E(X) = 0{,}4$
❑ B) $E(X) = 4$
❑ C) $E(X) = 2{,}5$

6. **Per una v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:**

❑ A) $\mu = Me = Mo$
❑ B) $\mu \neq Me \neq Mo$
❑ C) $\mu \leq Me \leq Mo$

7. **Una v.a. $X \sim Z$ ha:**

❑ A) $E(X) = 1$; $Var(X) = 0$
❑ B) $E(X) = 0$; $Var(X) = 1$
❑ C) $E(X) = 0$; $Var(X) = 0$

8. **Al crescere dei gradi di libertà la varianza di una v.a. $X \sim T_g$ è:**

- ❏ A) $Var(X) \to 0$
- ❏ B) $Var(X) = 0$
- ❏ C) $Var(X) \to 1$

9. **La somma o media di v.a. gaussiane:**

- ❏ A) ha sempre distribuzione normale
- ❏ B) ha distribuzione normale solo per $n \to \infty$
- ❏ C) ha distribuzione normale solo se le v.a. sono indipendenti

10. **Una v.a. $X \sim Bin(n, p)$ può essere approssimata da una v.a. normale standardizzata se:**

- ❏ A) la v.a. X è indipendente da Z
- ❏ B) n è grande e p non è prossimo allo zero
- ❏ C) la v.a. X è asimmetrica

Risposte

(*Per approfondimenti teorici si rimanda al volume*
PT10 - Probabilità e Statistica per le scienze e l'ingegneria)

1. A (*v.* cap. 3 par. 2).
2. B (*v.* cap. 3 par. 3).
3. B (*v.* cap. 3 par. 4).
4. B (*v.* cap. 3 par. 4).
5. C (*v.* cap. 4 par. 3).
6. A (*v.* cap. 4 par. 5).
7. B (*v.* cap. 4 par. 5).
8. C (*v.* cap. 4 par. 6.2).
9. A (*v.* cap. 4 par. 9).
10. B (*v.* cap. 4 par. 9).

Ulteriori quesiti a scelta multipla

(*le soluzioni sono disponibili sul sito* www.sistemieditoriali.it/puntoexe)

1. **Si supponga che il 15% della popolazione degli studenti della facoltà di Ingegneria abbia gli occhi di colore azzurro. Scegliendo in modo casuale un campione di 20 studenti da questa popolazione determinare la probabilità che vi siano 4 persone con gli occhi azzurri.**

   Ⓐ 0,85
   Ⓑ 0,15
   Ⓒ 0,116
   Ⓓ 0,182

2. **Un'urna contiene 25 palline bianche e 75 palline nere. Determinare la probabilità di ottenere, in 13 estrazioni senza reimmissione, 6 palline bianche:**

   Ⓐ 0,0559
   Ⓑ 0,0186
   Ⓒ 0,0494
   Ⓓ 0,0014

3. **Presso il pronto soccorso di un ospedale ogni 15 minuti arrivano in media 5 ambulanze.**
   Supponendo che il numero *X* di ambulanze si distribuisca secondo la legge di Poisson, determinare la probabilità che, aspettando 15 minuti, arrivino non più di 5 ambulanze:

   Ⓐ 0,0067
   Ⓑ 0,6160
   Ⓒ 0,1755
   Ⓓ 0,4405

4. **Misurazioni ripetute di una barra metallica danno luogo ad una distribuzione normale di media 5,3 cm e scarto quadratico medio 0,1 cm. Determinare la probabilità che una barra abbia una lunghezza compresa tra 5,25 cm e 5,35 cm.**

   Ⓐ 0,69146
   Ⓑ 0,38292
   Ⓒ 0,30854
   Ⓓ 0,65542

5. **La durata di vita *X* di una data tipologia di apparecchio elettrico presenta distribuzione normale con media 3 anni e scarto quadratico medio 0,8 anni. Determinare la probabilità che un apparecchio scelto a caso presenti una vita media maggiore di 4 anni.**

   Ⓐ 0,84134
   Ⓑ 0,89435
   Ⓒ 0,99865
   Ⓓ 0,10565

Test di verifica (Vero/Falso)

(*le soluzioni sono disponibili sul sito* www.sistemieditoriali.it/puntoexe)

1. La v.a. binomiale presenta asimmetria nulla. Ⓥ Ⓕ

2. Il valore medio di una v.a. di Poisson è sempre maggiore della varianza della v.a. stessa. Ⓥ Ⓕ

3. La v.a. ipergeometrica è associata ad un'estrazione con ripetizione da una popolazione di ampiezza finita. Ⓥ Ⓕ

4. La v.a. normale presenta asimmetria nulla. Ⓥ Ⓕ

5. La v.a. normale standardizzata ha valore medio unitario e varianza nulla. Ⓥ Ⓕ

6. Una combinazione lineare di v.a. normali indipendenti è ancora normale. Ⓥ Ⓕ

7. Al crescere dei gradi di libertà la v.a. di Student converge ad una v.a. normale standardizzata. Ⓥ Ⓕ

8. La varianza di una v.a. chi-quadrato è sempre il doppio del valore medio della medesima v.a. Ⓥ Ⓕ

9. La v.a. F di Fisher è definita come il rapporto di due v.a. t di Student indipendenti tra loro, divise per i rispettivi gradi di libertà. Ⓥ Ⓕ

10. Il teorema limite centrale mostra che la somma di due v.a. ha sempre distribuzione normale, quale che sia la loro distribuzione. Ⓥ Ⓕ