

Calcolo delle probabilità: esercizi svolti fino all'8 febbraio

Alessandro Sicco
sicco@dm.unito.it

LEZIONE 1. CALCOLO COMBINATORIO, FORMULA DELLE PROBABILITÀ TOTALI, FORMULA DI BAYES

Esercizio 1.1. 7 bambini giocano in cerchio. In quanti modi differenti possono disporsi?

Esercizio 1.2. Si vuole creare un gruppo di 3 statistici e 2 informatici scegliendoli tra 5 statistici e 6 informatici. Quante sono le possibili combinazioni se:

- Non si impone nessuna condizione aggiuntiva. [150]
- Nel gruppo devono essere inclusi 2 particolari statistici. [45]
- Un certo informatico non può essere incluso. [100]

Esercizio 1.3. In un'urna ci sono a palline bianche (B) e b palline nere (N). Estraggo una pallina dall'urna: se è B la reinserisco, se è N la sostituisco con una B. Qual è la probabilità di estrarre una pallina bianca alla seconda estrazione?
[$\frac{a^2+ab+b}{(a+b)^2}$]

Esercizio 1.4. Si sta effettuando uno studio su un test dell'HIV. Si sa che la percentuale di malati nella popolazione è dello 0.1%. Il test, effettuato su una persona malata, dà risultato positivo nel 95% dei casi, mentre, effettuato su una persona sana, dà risultato negativo nel 98% dei casi. Se una persona risulta positiva al test, che probabilità ha di essere realmente malata? [0.045]

Esercizio 1.5. In una linea produttiva la probabilità che un pezzo sia difettoso è 0.2. Il controllo di qualità non elimina il 20% dei pezzi prodotti, e non elimina un pezzo non difettoso con probabilità 0.999%. Qual è la probabilità che un pezzo non eliminato sia difettoso? [0.001]

LEZIONE 2. VARIABILI ALEATORIE BINOMIALI

Esercizio 2.1. Il controllore sale sull'autobus. Sull'autobus ci sono 6 persone. La probabilità che una persona non abbia il biglietto è 0.05. Con che probabilità il controllore troverà:

- a) 2 persone senza biglietto. [0.016]
- b) almeno 2 persone senza biglietto. [0.033]
- c) meno di 2 persone senza biglietto. [0.967]

Esercizio 2.2. Un'azienda produce CD. La probabilità che un CD sia difettoso è 0.01. I CD vengono confezionati in scatole da 10 pezzi, ed ogni scatola può essere resa se contiene più di un pezzo difettoso.

- a) Che percentuale di confezioni viene resa? [0.4%]
- b) Comprando 3 confezioni, qual è la probabilità di renderne una? [0.011]

Esercizio 2.3. La rete informatica di 4 aziende è soggetta a frequenti attacchi esterni. Un firewall viene installato nelle aziende. Con probabilità 0.8 il firewall protegge la rete da ulteriori attacchi.

- a) Qual è la probabilità che almeno 3 reti siano protette? [0.8192]
- b) Qual è la probabilità che 3 reti siano protette? [0.4096]

Se il firewall fallisce, la rete viene attaccata con probabilità 0.7.

- c) Qual è la probabilità che, su 100 reti, meno di 10 vengano attaccate? [0.999]

Esercizio 2.4. Una statistica ha mostrato che il 25% degli atleti di una certa specialità fa uso di doping. Un atleta dopato ha probabilità 0.2 di vincere una gara, mentre un atleta non dopato ha probabilità 0.1 di vincere.

- a) Qual è la probabilità che il vincitore di una gara sia dopato? [0.4]
- b) Su 8 gare, qual è la probabilità che meno della metà dei vincitori sia dopata? [0.59]

Esercizio 2.5. Un sistema elettronico è composto da 10 componenti ognuno dei quali funziona con probabilità 0.9.

- a) Con che probabilità il sistema funziona? [0.736]

Con probabilità 0.15 un corto circuito mette fuori uso un componente.

- b) Qual è la probabilità che il sistema funzioni in caso di corto circuito? [0.387]
- c) Se il sistema non funziona, qual è la probabilità che ci sia stato un corto circuito? [0.085]

LEZIONE 3. VARIABILI ALEATORIE GEOMETRICHE, GEOMETRICHE TRASLATE,
BINOMIALI NEGATIVE

Esercizio 3.1. In una linea produttiva ogni pezzo ha probabilità 0.03 di essere difettoso. Calcolare:

- La probabilità che su 100 pezzi non più di 3 siano difettosi. [0.647]
- La probabilità che il primo pezzo difettoso si abbia al 15° pezzo esaminato. [0.019]
- La probabilità di trovare 100 pezzi funzionanti prima di trovarne 2 difettosi. [0.004]
- La probabilità di esaminare esattamente 150 pezzi per trovarne 5 difettosi. [0.0057]

Esercizio 3.2. Giocando alla roulette, punto sul rosso 1 euro a puntata. sapendo che la probabilità che esca il rosso è $18/37$, calcolare:

- La probabilità di vincere per la prima volta alla quinta partita. [0.034]
- La probabilità di vincere almeno due partite giocandone 10. [0.9866]
- Ogni volta che vinco, vinco 1 euro, ogni volta che vinco, perdo 1 euro. Giocando 10 partite, qual è la probabilità di guadagnare in totale 2 euro? [0.1936]

Esercizio 3.3. La probabilità di vincere giocando ad una slot machine è 0.1, calcolare:

- La probabilità di vincere 6 volte su 10 giocate. [0.00014]
- La probabilità di vincere per la prima volta alla decima giocata. [0.3874]
- Se non ci sono state vittorie nelle prime 5 giocate, la probabilità di vincere alla sesta giocata. [0.1]

Esercizio 3.4. Una fabbrica di automobili sta per lanciare una nuova auto sul mercato di 6 paesi europei. Ogni mese viene controllato l'andamento delle vendite: se l'auto ha avuto successo in almeno 4 paesi, ogni dipendente riceverà una gratifica in busta paga. La probabilità che l'auto abbia successo in un paese è 0.5.

- Qual è la probabilità che nei primi 10 mesi i dipendenti ricevano almeno 2 gratifiche? [0.442]
- Qual è la probabilità che i dipendenti debbano aspettare 4 mesi prima di avere la prima gratifica? [0.081]
- Qual è la probabilità che i dipendenti stiano 5 mesi senza gratifica prima di avere 3 gratifiche? [0.044]
- Qual è la probabilità che la prima gratifica arrivi entro 4 mesi? [0.546]

Esercizio 3.5. Ho scritto un software che intendo commercializzare. Dai miei test risulta che il software causa errori di sistema con probabilità 0.05 su Windows e con probabilità 0.1 su Unix. Il 70% dei miei clienti usa Windows.

- Con che probabilità su 100 utenti non più di 3 reclameranno? [0.104]
- Con che probabilità il primo reclamo verrà presentato dal 10° utente? [0.035]
- Con che probabilità il primo reclamo verrà presentato entro 10° utente? [0.489]

LEZIONE 4. VARIABILI ALEATORIE IPERGEOMETRICHE, DI POISSON

Esercizio 4.1. Nell'esercizio **3.5**: sapendo che su 100 utenti, 10 si sono lamentati, ne intervisto 20 a caso.

d) Qual é la probabilità che 3 di questi siano insoddisfatti? [0.20]

Esercizio 4.2. Su un autobus ci sono 25 persone, 18 delle quali sedute. Ad una fermata scendono 5 persone.

Qual é la probabilità che si liberino 2 posti a sedere? [0.1]

Esercizio 4.3. In un magazzino ci sono 1000 televisori LCD; 800 di questi provengono dalla casa produttrice, gli altri sono di dubbia provenienza. Un negoziante acquista 10 televisori.

Con che probabilità il negoziante acquisterá meno di 3 televisori di dubbia provenienza? [0.6781 con ipergeometrica; 0.6778 con approssimazione binomiale]

Esercizio 4.4. In un quartiere si verifica in media un black-out ogni mese.

a) Qual é la probabilità che nel prossimo mese se ne verifichi piú di uno? e che ce ne siano 2? e nessuno? [0.264;0.184;0.368]

b) Qual é la probabilità che nei prossimi 6 mesi:

- si verifichino almeno 4 black-out? [0.85]

- si verifichino meno di 4 black-out? [0.445]

- ce ne siano 2 senza black-out? [0.32]

c) Con che probabilità il primo mese senza black-out sará il 3°? [0.14]

LEZIONE 5. ANCORA POISSON, MEDIA E VARIANZA DI V.A.

Esercizio 5.1. Negli ultimi 5 mesi il mio vecchio PC é andato in crash 3 volte

- a) Qual é la probabilità che il PC vada in crash nei prossimi 20 giorni? [0.272 Binomiale; 0.268 Poisson]
- b) Qual é la probabilità che il PC vada in crash piú di 2 volte nei prossimi 60 giorni? [0.119 Binomiale; 0.121 Poisson]
- c) In media, nei prossimi 50 giorni, quanti ce ne saranno senza crash? [49]

Esercizio 5.2. Sto vendendo il mio software a diverse aziende. Ogni volta che riesco a vendere il software ad un'azienda guadagno 100000 euro, se non riesco a venderlo perdo 10000 euro. Sapendo che la probabilità di vendere il software ad un'azienda é 0.1, quanto guadagneró in media proponendo il software a 5 aziende? [5000]

Esercizio 5.3. Tre hacker in competizione tra loro tentano di violare un sito ciascuno. Ognuno di loro ha probabilità 0.33 di riuscirci. Quanti siti verranno violati, in media? [1]

Esercizio 5.4. Ho solo piú 125 Mb liberi sul mio hard disk. Sto scaricando Mp3 dalla rete; ogni file pesa circa 4 Mb e in media ne scarico 2 al minuto. Inoltre, ogni minuto con probabilità 0.2 ricevo via e-mail un'immagine da 1 Mb. Riempiró il mio hard disk in 15 minuti? [No: la media in 15 minuti é 123Mb scaricati]

LEZIONE 6. VETTORI ALEATORI

Esercizio 6.1. Ho investito i miei risparmi in due diversi fondi azionari. Le possibilità di guadagno dei due fondi, in percentuale, sono espresse da due variabili aleatorie X e Y , di cui conosco la densità congiunta:

	$Y = 1$	$Y = 0$	$Y = -1$
$X = 15$	0	$2/36$	0
$X = 1$	$4/36$	$2/36$	0
$X = 0$	$1/36$	$26/36$	$1/36$

- a) L'andamento dei due fondi é correlato? [No]
 b) I due fondi hanno guadagni indipendenti? [Si]

Esercizio 6.2. Un sistema elettronico composto da 2 componenti lavora in serie con un sistema composto da un solo componente. Il numero di componenti non funzionanti del primo e del secondo sistema é espresso da due variabili aleatorie X e Y , di cui conosco la densità congiunta:

	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = 0$	$1/3$	$1/3$
$X = 1$	$1/12$	$1/12$
$X = 2$	$1/12$	$1/12$

- a) Il funzionamento dei componenti dei due sistemi é correlato? [No]
 b) I due sistemi possono essere considerati indipendenti? [Si]

Esercizio 6.3. Un internet point ha 9 computer. 3 si connettono ad una rete wireless, 4 si connettono tramite LAN e i restanti 2 hanno un modem interno. 3 utenti occupano i PC. Chiamata X la variabile aleatoria che conta il numero di PC con rete wireless occupati e Y la variabile aleatoria che conta il numero di PC con modem interno occupati,

- a) Calcolare la densità congiunta del vettore aleatorio (X, Y)

	$Y = 1$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 0$	$1/21$	$1/7$	$1/21$
$X = 1$	$3/14$	$2/7$	$1/28$
$X = 2$	$1/7$	$1/14$	0
$X = 3$	$1/84$	0	0

- b) Calcolare la covarianza del vettore aleatorio (X, Y) [$10/21$]
 c) Dire se le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti. [No]