ESERCIZI DI CALCOLABILITA E COMPLESSITA

RIGELS ZYFERI Mat: 693236

06/12/2005

1. Si dimostri che il problema del contenimento per linguaggi regolari è decidibile. In altre parole si dimostri che il seguente linguaggio è decidibile:

   $CONT_{DFA}$={<A,A'> | L(A)⊃L(A') o L(A)=L(A')}

Semplifichiamo $CONT_{DFA}$={<A,A'> | L(A)⊃L(A') o L(A)=L(A')} nella sua equivalente
$CONT_{DFA}$={<A,A'> | L(A)⊇L(A')}
Segue che L(A)⊇L(A') <=> L(A') \ L(A)=∅.
Costruiamo una nuova DFA B da A e A' tale che B accetta tutte le stringhe che A' accetta man non quelle accette da A, cioè L(B)=L(A') \ L(A).
Sia E_{DFA}={<C> | C é un DFA e L(C)=∅ } e sia T∈TM tale che L(T)=E_{DFA}, è noto che E_{DFA} è un linguaggio decidibile. Sfrutiamo questo fatto per vedere che, L(B)=∅ => L(A)⊇L(A').
Costruiamo una TM D che decide $CONT_{DFA}$.

D= “ input <A,A'> dove A eA' sono DFA “

1. Costruire DFA B come descrito.
2. Avviare TM T con input <B>.
3. Se T accetta, accettare; se T rifiuta, rifiutare.

2. Si consideri una TM nondeterministica a k nastri(in breve kNTM), T=(Q, Σ, Γ ,δ,q_0,q_a,q_r) con δ:QxΓ^k —> P(Q x Γ^k x {L,R}^{k}) e le altre componenti con l'usuale significato. Le kNTM sono equivalenti alle TM? Si dia una breve dimostrazione, elencando i passi da svolgere senza dettagliarli.

E' vero che kNTM sono equivalenti alle TM. L'affermazione segue considerando la seguente dimostrazione per costruzione.
Nel primo passo mostriamo che ogni M∈ kNTM ha una sua S ∈ NTM equivalente.
L'idea è di simulare M con S. La costruzione è la stessa come quella di kTM ad un TM equivalente.
Nel secondo passo mostriamo che ogni S ∈ NTM ha una sua D ∈ TM equivalente.
L'idea è di simulare S con D. La costruzione di questo passo e gia noto (segue dalla teorema che ogni NTM ha una sua TM equivalente).
Alla fine segue che D contiene nell primo nastro tutte le stringhe contenute nei k nastri di M, nel il secondo nastro serve per la simulazione e il terzo nastro contiene gli indirizzi dei nodi dell albero di possibili configurazioni.
Sicome M≡S e S≡D allora M≡D (per la proprieta transitiva) segue che kNTM≡TM.

3. Detto B l'insieme di tutte le stringhe binarie di lunghezza infinita, sia C il suo sottinsieme che contiene solo quelle stringhe che contengono al più 25 uno. Si dimostri che C è numerabile.

Consideriamo una matrice $M_{i,j}$ con infinite righe (**$i \geq 1$**) e con 25 colonne ($1 \leq \mathbf{j} \leq 25$).
Sulla **j-esima** colonna e su tutte le sue righe, ragruppiamo tutte le stringe binarie di lunghezza infinita che contengono **j** uno, cioè un sottinsieme di **C**. Considerando il seguente funzione biietivo possiamo mettere in corrispondenza **$n \in N$** con **f(n)**:

$f(n)=A_{d(n),m(n)}$ dove **$A \in M_{i,j}$** , $n \in$ **N**(insieme dei naturali), i funzioni **d(n),m(n)** sono definiti come:

d(n)="d(n-1) se (n mod 25 $\equiv$0), altrimenti la parte intera della divisione tra n e 25, piu 1**"**

m(n)=" 25 se (n mod 25 $\equiv$ 0) , altrimenti (n mod 25)**"**

La stringa infinita contenente solo dei zeri si puo associare con **n**=0 se considero che **$n \in NU\{0\}$.**
Alla fine risulta che **C** è numerabile.