Università degli Studi di Palermo
Corso di Laurea Scienze della Formazione Primaria
A.A. 2003-2004

Il bambino e l'apprendimento del numero

Miceli Simona Serena

Relatore: *Prof. Spagnolo Filippo*

Premessa

Il presente lavoro può considerarsi un vero e proprio "viaggio" nel mondo dei numeri. Ripercorro ancora una volta questa strada, riparto da lì dove l'avevo lasciata nel Luglio 2002[1], con nuove idee, nuove esperienze, ma anche nuovi dubbi ed interrogativi.

Il punto di partenza è stato l'apprendimento della matematica nei bambini più piccoli: "come arrivano i bambini all'acquisizione del numero?"

Ancora una volta, come è anche accaduto nel lavoro precedente, si è prospettato dinnanzi a me un panorama di ricerca sconfinato, "infinito" (si parla di numeri e non poteva essere altrimenti!)

Mentre la prima volta, nell'immenso "mare" in cui mi stavo inoltrando, ho deciso di fermarmi e analizzare solo un fenomeno "la conservazione della quantità"; in questo secondo lavoro di ricerca ho voluto dare uno sguardo più ampio al fenomeno.

Questa nuova esperienza ha significato un incontro di diversi studi, prospettive, riferimenti teorici, che mi hanno quasi "guidato" essi stessi a produrre il presente lavoro.

L'acquisizione del numero: uno dei temi sicuramente più affascinanti del sapere matematico, che ha fatto crescere sempre più il desiderio di indagare questo fenomeno, dalla cui analisi ho compreso che non si può banalizzare e svilire, ma si tratta di una conoscenza che gli studiosi rispettano e temono perché ne conoscono le difficoltà e le sottigliezze.

Perché spesso gli studenti non riescono ad affrontare la matematica, i numeri con serenità e voglia di giocare? Quali difficoltà e meccanismi si celano dietro ad essi? Ancora di più nella scuola dell'infanzia sembra che parlare di numeri spaventi ancora un po', forse più gli studiosi e i legislatori, non di certo i bambini che non solo non sembrano avere né ansie né fobie, ma che al contrario si divertono con quanto di matematico il mondo offre loro.

---

[1] Tesi di Laurea*"La conservazione della quantità nell'insegnamento/apprendimento della matematica (età 5-6anni)* Università degli studi di Palermo, Facoltà Scienze della Formazione, c.d.l. Scienze della Formazione Primaria (Luglio 2002)
Relatori della tesi: Proff Filippo Spagnolo e Romano Carlo.

Il panorama di ricerca, come è stato detto, è vasto e sconfinato, ma purtroppo ancora in Italia gli studi sulla costruzione del numero del bambino, nonostante la notevole quantità di ricerche proposte sull'argomento e l'indiscutibile interesse che riveste sul piano psicologico e psicopedagogico, i contributi originali sono molto pochi, tranne poche interessanti eccezioni.

Alcuni tentano di spiegare questo fenomeno con l'autorità di cui tutt'ora gode l'ipotesi Piagetiana, seppure dopo Piaget si è fatta parecchia strada nella ricerca.

Il presente lavoro offre piccoli spunti e analizza solo alcune sfaccettature del fenomeno, raccogliendo alcuni dei più interessanti contributi italiani e stranieri, può essere così delineato sinteticamente:

- Inizialmente si sono analizzati alcuni riferimenti teorici; precursore di questi studi è sicuramente Piaget. Successivamente intorno agli anni settanta Gelman e Gallistel, e la Fuson, negli anni ottanta, aprono nuove prospettive. Infine sono stati particolarmente evidenziati due studi recentissimi nel panorama internazionale: Butterworth e Dehaene, il primo inglese il secondo francese; entrambi considerando le prospettive della nueroscienza, della psicologia, del linguaggio, forniscono contributi interessanti al fenomeno; infine si è posta l'attenzione sul panorama italiano.
- Un'analisi dei quattro approcci al numero naturale.
- Una breve storia del numero di come l'uomo è arrivato alla sua scoperta.
- Infine, considerando anche gli aspetti analizzati e fin qui elencati, si è posta l'attenzione sul rapporto fra linguaggio e numeri. Su tale aspetto si è effettuata una semplice sperimentazione e si è anche analizzato il fenomeno con l'osservazione di alcuni casi.

Contare è un'attività complessa. In questo contesto di ricerca, confrontando Piaget, il precursore, con gli studi più recenti, mostreremo che i bambini in età prescolare hanno già degli embrioni per le operazione di calcolo, come il subtizing che fa parte di una sorta di eredità genetica che condividiamo con la specie animale. Naturalmente accanto a questo modulo numerico, considerato genetico, gioca un ruolo fondamentale l'ambiente e i suoi stimoli che si forniscono al bambino. Si è poi ritenuto interessante riportare una sorta di storia dei numeri dalle civiltà antiche alla numerazione arabica che ha la straordinaria capacità, utilizzando solo dieci simboli, e grazie alla notazione posizionale, di poter esprimere qualsiasi grandezza.

In fondo, l'affermazione di questo modo di esprimere i numeri è (relativamente) recente, essendosi affacciata in Occidente intorno all'anno 1000 e diffusa intorno al 1500.

La notazione posizionale ha, ovviamente, facilitato i calcoli che non sono più una materia per pochi iniziati e, quindi, ha contribuito in modo dirompente allo sviluppo degli ultimi secoli, insieme ad altri fattori. C'è da chiedersi cosa avrebbe potuto compiere Pitagora e gli ellenici se avessero potuto disporre di questo strumento!

Capitolo I: Le prospettive teoriche, da Piaget a oggi

1.1 Il modello Piagetiano

Lo sviluppo psichico, che comincia con la nascita e termina con l'età adulta, è paragonabile alla crescita organica: come quest'ultima, consiste essenzialmente in un cammino verso l'equilibrio. Lo sviluppo è un progressivo equilibrarsi, un passaggio continuo da uno stato di minore equilibrio ad uno di equilibrio superiore. (Piaget, 1964).

Piaget suddivide lo sviluppo cognitivo in quattro stadi principali, ognuno caratterizzato da una modalità di pensiero qualitativamente diversa, resa possibile dall'emergere di un nuovo schema che si costruisce sulla base delle esperienze del bambino durante lo stadio precedente. Il completamento di uno stadio è una condizione imprescindibile perché possa evolversi lo stadio successivo; ne discende che l'ordine dei quattro stadi è invariabile. Gli stadi possono così essere distinti:

- Stadio senso – motorio (dalla nascita ai due anni circa);
- Stadio pre – operatorio (dai due ai sette anni);
- Stadio operatorio concreto (dai sette ai dodici anni circa);
- Stadio operatorio formale (dai dodici anni a tutta l'età adulta).

Fra i suoi innumerevoli studi approfondì la formazione del simbolo numerico nei bambini.

L'ipotesi piagetiana sulla costruzione del numero nel bambino, elaborata negli anni quaranta, costituisce ancora oggi un prezioso punto di riferimento per la ricerca psicologica nel settore (Liverta Sempio, 1997).

Lo psicologo svizzero ipotizza che la costruzione del numero sia correlata con lo sviluppo della logica e quindi ad un livello prelogico del pensiero corrisponde un periodo prenumerico; il numero si costruisce e si evolve in stretto rapporto con l' elaborazione graduale delle operazioni di classe e di serie, costituendosi quale loro sintesi operante (Piaget, 1941).

Secondo Piaget, quindi, il numero è una costruzione di natura operatoria. Esso, a partire dal livello di assenza delle operazioni, documentato dal fallimento del bambino nella conservazione della quantità, si costruisce gradualmente.

I fattori che contribuiscono alla costruzione del numero sono molteplici; in modo particolare ne ricordiamo due, sui quali Piaget dedica numerosi studi:

- La conservazione della quantità
- La corrispondenza biunivoca

1.1.1 La conservazione della quantità

Nei suoi studi Piaget approfondì la costruzione del numero in rapporto con le operazioni logiche, in modo particolare la conservazione della quantità.[2]

Indagò molto su questo fenomeno, egli sostiene che i bambini nello stadio pre - operatorio (dai due ai sette anni) non possiedono il principio di conservazione; ovvero non si rendono conto che la quantità di una certa sostanza non cambia al cambiare della sua forma (Gray, 1998)

Sono numerosi i test di Piaget relativi al concetto di conservazione della quantità; alcuni di questi sono di seguito illustrati:

- **Fig.1:** si dispongono delle monete o delle biglie su due file uguali e parallele, il bambino si rende conto che il numero degli elementi è lo stesso in entrambe le file; poi si distanziano gli elementi di una sola fila chiedendo al bambino se i due insiemi sono ancora uguali.

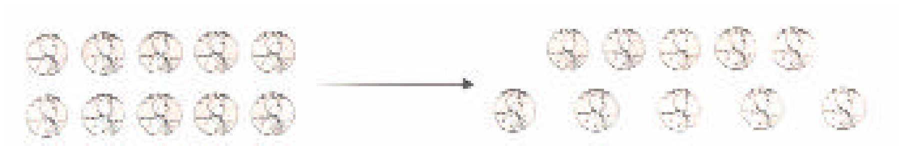


Fig.1

- **Fig.2** si dispongono l'uno accanto all'altro due bastoncini lunghi uguali: il bambino dirà che sono della stessa lunghezza. Quindi, uno dei bastoncini viene leggermente sfalsato rispetto all'altro, e si chiederà di nuovo al bambino se sono entrambi di uguale lunghezza.

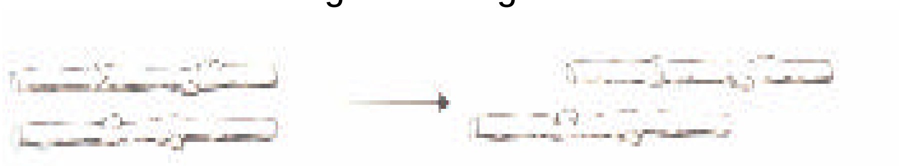


Fig.2

- **Fig.3** si mostrano al bambino due blocchi uguali di creta, che vengono arrotondati a forma di pallina: il bambino dice che la quantità di creta è la stessa in entrambe. Poi una

[2] Quest'argomento è stato dettagliatamente descritto nel lavoro di tesi precedente *"La conservazione della quantità nell'insegnamento-apprendimento della matematica 5-6anni"*(Luglio 2002) , e ne viene riportata una breve sintesi.

pallina viene schiacciata in una forma lineare e di nuovo si chiede al bambino se la quantità di creta è la stessa nelle due forme.

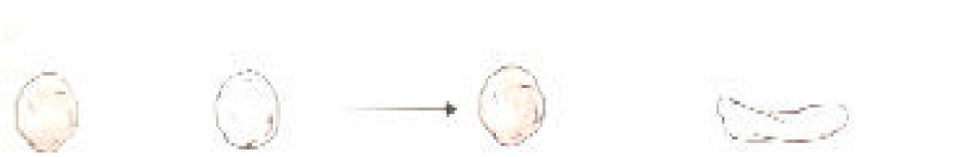
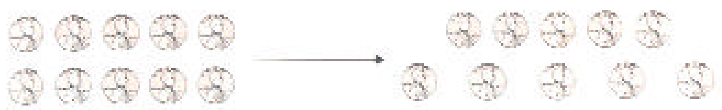


Fig.3

Di seguito vengono riportati sinteticamente gli studi di Piaget relativamente al concetto di conservazione di quantità continue e discontinue.

GLI STADI

Quantità Continue



⇒ Assenza di conservazione
⇒ Risposte intermedie
⇒ La conservazione necessaria

Quantità discontinue

⇒ Assenza di conservazione
⇒ Inizio di costituzione di complessi permanenti
⇒ Conservazione e coordinazioni quantificate

1.1.2 La corrispondenza biunivoca

L'analisi degli inizi della quantificazione comporta approfondire il problema della corrispondenza; Piaget (1941, p.59) così la definisce: "confrontare due quantità significa o mettere in proporzione le loro dimensioni, o porre in corrispondenza i loro elementi termine con termine".

Questa corrispondenza è chiaramente lo strumento impiegato dalla mente per scomporre le totalità da confrontare fra loro.

Piaget indaga la corrispondenza biunivoca nello specifico nella corrispondenza fra oggetti eterogenei, ma qualitativamente complementari e si tratta di una "corrispondenza provocata" dalle circostanze esteriori stesse. Tra gli esperimenti più importanti ricordiamo: uovo-portauovo, bicchiere-bottiglia, fiore-vaso.

Anche in questo caso distingue differenti stadi che gradualmente portano il bambino al possesso di abilità per riuscire a stabilire la corrispondenza biunivoca fra due insiemi. Proprio in questo evolversi di stadi Piaget pone l'attenzione sulla numerazione parlata, egli sostiene che essa di per sé non rappresenta alcun fattore di progresso nella corrispondenza biunivoca. È soltanto dopo il conseguimento di quest'ultima che la numerazione parlata può essere applicata con successo. Piaget (1941, p.91) sostiene che: "la numerazione verbale non rappresenta alcuna parte nel progresso stesso della corrispondenza e dell'equivalenza. Senza dubbio nel momento in cui la corrispondenza diviene quantificante e dà così origine a degli inizi di equivalenza, la numerazione parlata può accelerare il processo di evoluzione; ma i nomi dei numeri come tali non lo generano."

Jean Piaget

1.2 Dopo Piaget

A partire dagli anni sessanta compaiono sempre più numerosi i lavori di analisi e di critica del pensiero piagetiano, nello specifico sulla competenza logica del bambino pre-operatorio in cui rientra la costruzione del numero. Queste ricerche mostrano che sulla prestazione del bambino nelle prove logiche influiscono fattori estranei (Liverta Sempio, 1997) che possono così essere sintetizzati:

- Piano della comunicazione: in relazione al piano comunicativo si sono studiati l'effetto del grado di familiarità delle formulazioni linguistiche con cui si rivolge ai bambini, l'influenza della pregnanza psicologica dei termini utilizzati e l'incidenza della competenza conversazionale del bambino. Tra gli studi più noti ricordiamo quelli della Donaldson (1978); ad esempio, in alcune prove logiche piagetiane l'intervistatore rivolge più volte al bambino la stessa domanda. Poiché nella conversazione usuale non si richiede più volte un'informazione quando questa è stata già fornita, il bambino può interpretare la ripetuta domanda dell'esaminatore come richiesta di una risposta diversa e comportarsi di conseguenza fornendo una risposta diversa, così la prestazione risulta però scorretta dallo sperimentatore.

- L'interazione sociale: lo studio delle competenze cognitive pone l'attenzione su un fattore extra logico, l'interazione sociale; variabile oggetto di studio privilegiato dall'approccio socio-costruttivista. Numerosi studi hanno messo in luce l'effetto strutturante di un determinato tipo di confronto sociale sulle costruzioni cognitive del bambino il confronto conflittuale può verificarsi anche in rapporto alle norme sociali che regolano l'interazione.
- Il significato sociale della situazione: negli anni ottanta sono prolificati gli studi su questo aspetto specifico indicati come studi della "seconda generazione". In essi si evidenzia che la dimensione sociale esercita la propria influenza dall'interno stesso dell'attività cognitiva.

1.3 Gelman & Gallistel

La maggior parte delle ricerche pubblicate negli ultimi venticinque anni sulle conoscenze matematiche dei bambini in età prescolare trovano le loro basi teoriche negli studi di Rochel Gelman e C.R.Gallistel raccolti nel loro principale testo "*The child's understanidng of number*" del 1978. Purtroppo, nonostante l'importanza e l'influenza del loro contributo per i ricercatori e gli educatori, i loro studi non sono mai stati pubblicati in lingua italiana.

Per approfondire le loro ricerche, riassunte brevemente nei successivi paragrafi, si è fatto riferimento ad una traduzione di parte del loro testo (tratta dl sito: www.macchinematematiche.unimo.it) e agli studi di O. Liverta Sempio (1997).

A partire dagli anni settanta appaiono sempre più numerosi gli studi che affrontano il tema della costruzione del numero nel bambino relativamente a conoscenze matematiche trascurate o giudicate secondarie dal modello piagetiano. Tra questi spiccano le interessanti ricerche di Gelman e Gallistel.

Secondo questi ricercatori nello studio dello sviluppo del concetto di numero è necessario distinguere due tipi di processi:

- Il processo di astrazione
- Il processo di ragionamento

Il primo riguarda la formazione delle rappresentazione di numerosità, approssimate o precise delle collezioni; esso comprende il "subitizing" o subitizzazione: processo rapido, senza sforzo inconsapevole con cui si stabilisce con accuratezza la numerosità di insiemi di dimensioni limitate, da 1 a 3-4 elementi (; Gelman e Gallistel, 1978; Deheane, 1997); e la conta spontanea.

Il secondo processo di ragionamento numerico riguarda l'operare sulle numerosità cioè la capacità di fare inferenze sulle relazioni (maggiore, minore, uguale) e trasformazione numeriche (addizione, sottrazione).

Queste due abilità sono strettamente connesse, infatti, l'uso del ragionamento numerico dipende dall'avere rappresentazione mentale dei valori numerici; inoltre il ragionamento numerico infantile si svolge sulle rappresentazioni delle numerosità fornite dalla conta. Per questo motivo Gelman e Gallistel hanno ritenuto che Piaget abbia poco considerato il valore della conta, considerandola quasi un semplice automatismo prescolastico senza legami con le relazioni e le operazioni numeriche; le nostre due autrici, invece, ne valorizzano l'importanza.

Nello specifico per quanto riguarda la conta i bambini presentano comportamenti che non si possono spiegare esclusivamente risultanti di un apprendimento meccanico, anzi si ipotizza che il bambino possieda una comprensione di principi che regolano il contare; si tratta di una comprensione di tipo implicito.

Gelman e Gallistel (1978) hanno individuato i cinque principi che governano e definiscono il processo del contare e possono così essere sintetizzati.

1.3.1 I cinque principi del contare secondo Gelman e Gallistel

1. Il principio di iniettività (the one-one principle)

Consiste nell'appaiare gli oggetti di un insieme con "segni" etichette o numerons cioè le parole tradizionali usate per contare: uno, due….L'"etichetta" deve essere usata una sola volta.

I processi da coordinare sono:

- la ripartizione (partitioning): gli oggetti si devono distinguere in due categorie: già contati – da contare ("etichettati" - da"etichettare");
- etichettamento trovare ogni volta etichette diverse.

Se per un adulto questi processi sono scontati per un bambino non è tutto così semplice, è necessario, inoltre, che un'etichetta già prelevata non deve essere riutilizzata.

Il bambino deve essere anche capace di saper coordinare i due processi, cioè iniziarli e completarli insieme; una strategia in tal senso è quella di "indicare" ogni oggetto.

Nel principio di iniettività è possibile che il bambino compia tre tipi di errori:

1. errori nel processo di "ripartizione": saltare un oggetto una o più volte;
2. errori nel processo di "etichettamento": usare più volte la stessa etichetta;

3. fallimento nel coordinare i due processi: continuare nel prelevare l'etichette quando tutti gli oggetti sono nella categoria nei già contati o prelevare un numero di etichette diverso dal numero degli oggetti.

La questione se i bambini siano in grado di coordinare i processi è tutt'ora aperta; secondo gli studi di Potter e Levy sembra che i bambini di tre anni abbiano già almeno il processo di ripartizione: chiedendo infatti di toccare ogni oggetto una sola volta da uno schieramento i bambini sono in grado di farlo ma risulta più facile in uno schieramento ordinato (fila) rispetto ad uno schieramento casuale.

2. Il principio dell'ordine stabile (the stable-order principle)

Il contare coinvolge più cose che l'abilità di assegnare arbitrariamente etichette agli oggetti di uno schieramento. Anche se il bambino sa usare i numerali come etichette non si può facilmente concludere che conosca la procedura del contare.

Le etichette usate per etichettare gli oggetti di un insieme devono essere ordinate e scelte in un ordine stabile. Questo principio richiede l'uso di una lista stabile non certo semplice da acquisire.

La mente umana, infatti, ha difficoltà a formare lunghe liste di parole arbitrarie che possono essere richiamate in modo stabile; anche per quanto riguarda lo sviluppo di abilità numeriche dei bambini piccoli è necessaria la memorizzazione (rote-learning) dei primi numeri e comprendere dopo le regole generative per produrre i successivi.

In altre parole un'importante parte che contribuisce allo sviluppo di abilità numeriche è il bisogno di risolvere le difficoltà pratiche dal principio dell'ordine stabile.

3. Il principio di cardinalità (the Cardinal Principle)

Il principio di cardinalità afferma che l'etichetta finale ha un significato speciale; infatti, questa etichetta a differenza delle etichette precedenti, rappresenta la proprietà dell'intero insieme, è il numero cardinale dell'insieme.

In modo informale l'etichetta applicata all'oggetto finale dell'insieme rappresenta il numero degli oggetti degli insieme.

Il bambino oltre ad essere capace di assegnare le etichette deve successivamente essere anche in grado di tirar fuori l’ultima etichetta assegnata e indicare che essa rappresenta la numerosità dello schieramento.

Questo principio che presuppone gli altri due dovrebbe svilupparsi più tardi.

4. Il principio di astrazione (the abstraction principle)

Secondo Gelman e Gallistel i primi tre principi descrivono il funzionamento del processo del contare, essi riguardano il “come contare”. Il principio di astrazione afferma che essi possono essere applicati a tutti gli schieramenti, sia con riferimento a entità fisiche che non fisiche e anche a schieramenti eterogenei.

Secondo Gast il conteggio è possibile nei bambini di tre quattro anni solo se gli oggetti sono sistemati in gruppo, inoltre gli oggetti da contare devono essere uguali ad un altro insieme e sistemate in gruppi vicino l’un l’altro o in fila omogenea. Secondo questi studi solo a sette anni hanno un completo concetto di astrazione.

Invece, secondo gli studi di Gelman e Gallistel le abilità di classificare il mondo in cose-non cose è un derivato di una tra le prime e più primitive classificazioni mentali. I bambini, infatti, sono capaci di contare cosa eterogenee e talvolta, gli spazi tra gli oggetti (il massimo dell’astrazione!).

5. Il principio di irrilevanza dell’ordine (the order-irrelevance principle)

Secondo questo principio l’ordine di conteggio è irrilevante; così come l’ordine nel quale gli oggetti sono etichettati e quindi quale etichetta viene assegnata ad un oggetto e viceversa.

Perché i bambini comprendano che l’etichetta non appartiene definitivamente all’oggetto devono essere in grado di conoscere che:

- l’oggetto continua ad essere una cosa (non è diventato uno o due) secondo il principio di astrazione;
- che le etichette sono arbitrarie e provvisorie;
- in qualsiasi modo si conti risulta sempre lo stesso numero cardinale.

Questo principio riguarda non solo l’abilità del contare ma anche la comprensione delle proprietà dei numeri (i principi del ragionamento sui numeri).

1.4 Fuson

Anche la Fuson, sul finire degli anni ottanta individua un modello di costruzione del numero nel bambino.

Nonostante l'importanza del contributo della Fuson sia per i ricercatori che gli educatori nel campo della ricerca in didattica della matematica, come Gellman e Gallistel, purtroppo, non esiste ancora oggi in Italia una traduzione dei suoi testi.

Sono stati "strumenti preziosi" che mi hanno permesso di approfondire questo contributo teorico i testi di Liverta Sempio (1997) e della Lucangeli (2003).

La Fuson parte dalla considerazione che esistono numerose situazioni di uso delle parole-numero e distingue diverse categorie differenti da un punto di vista matematico:

- Tre contesti sono di ordine matematico:

1. Il contesto cardinale: in cui la parola-numero fa riferimento all'intera collezione di elementi discreti e dice di quanti elementi è costituita;
2. Il contesto ordinale: in cui la parola-numero fa riferimento ad un elemento collocato all'interno di una serie ordinata di elementi discreti e indica quale posizione vi occupa;
3. il contesto di misura: in cui la parola numero è in relazione ad una grandezza continua e indica quante unità di misura sono necessarie per "colmare" la grandezza;

- Due contesti riguardano l'enunciazione della serie numerica convenzionale:

4. Il contesto sequenza: in cui l'enunciazione è condotta senza riferire le parole-numero a oggetti o altro; le parole-numero sono usate come si usano le lettere nella recita dell'alfabeto;
5. Il contesto conta: dove l'enunciazione è condotta con riferimento a oggetti posti in corrispondenza uno a uno con le parole-numero;
6. Il contesto simbolico: in cui la parola numero è intesa come oggetto di scrittura o di lettura;
7. Il contesto non numerico: in cui la parola numero è usata come etichetta, identificando un attributo di un oggetto.

Le esperienze dei bambini con i numeri rientrano in tutti questi contesti d'uso delle parole-numero. L'integrazione di questi differenti significati non è appreso sino a quando il bambino non costruisce la sequenza numerica come serie nella quale in qualsiasi numero ha un valore cardinale formato da tutte le unità che lo precedono compreso sé stesso ed è un "più" rispetto al numero che lo precede.

Questo coincide con ciò che Piaget denomina il "quarto stadio della costruzione dell'equivalenza numerica, cioè lo stadio nel quale il contare ha un significato propriamente numerico; cioè la numerazione parlata costituisce la corrispondenza pratica fra oggetti.

La Fuson in questo senso considera il proprio lavoro come complementare a quello di Piaget poiché l'autrice mette in luce il ruolo svolto da strumenti culturali come la conta, sottovalutati nella descrizione piagetina della genesi del concetto di numero.

Il modello di sviluppo numerico proposto dalla Fuson descrive dettagliatamente l'evoluzione del bambino nell'acquisizione delle parole-numero legate a tre contesti d'uso: contesti di sequenza, di conta e cardinale; così questi contesti possono essere brevemente descritti:

- CONTESTI DI SEQUENZA:

L'acquisizione della sequenza comprende due momenti:

- L'apprendimento della recita corretta della sequenza standard. Questo impegna il bambino in un duplice compito: distinguere nel linguaggio le parole non numero dalle parole-numero e apprendere di questi l'ordine corretto. Proprio in considerazione a questa fase la Fuson riferisce le difficoltà che i bambini incontrano per i numeri da undici a venti.
- L'elaborazione della parte di sequenza: che consiste nello sviluppo di nuove abilità (distinti in cinque livelli).

- CONTESTO DI CONTA:

Il bambino inizia e a stabilire corrette corrispondenze termine a termine tra oggetti e parole numero.

- CONTESTO CARDINALE:

Il bambino comprende che nel pronunciare la conta, nel toccare o indicare gli elementi, l'ultima parola corrisponde al numero di elementi contati.

L'evoluzione dei concetti numerici nel bambino riguarda l'integrazione di questi tre diversi significati delle parole-numero. Questa evoluzione viene distinta dalla Fuson in 5 livelli:

1. *Sequenza come stringa:* il bambino produce la sequenza numerica a partire da uno come se si trattasse di un insieme indifferenziato;
2. *Sequenza come lista che non si può spezzare:* le parole-numero iniziano a differenziarsi, ma la sequenza esiste solo nella forma di una recitazione unidirezionale, sempre a partire da "uno", e iniziano anche a creare una corrispondenza termine a termine con le parole pronunciate e gli elementi dell'insieme.
3. *Sequenza come catena che si può spezzare:* la sequenza è producibile da un numero qualsiasi, ciò significa che i bambini inizia a stabilire il "prima e dopo". In questa fase il bambino è

in grado di sommare due numeri contando a partire da uno di essi.

4. *Sequenza come catena numerabile:* le parole-numero della sequenza sono trattate come entità distinte e unità equivalenti. Il bambino non ha bisogno di oggetti concreti, è in grado di eseguire sottrazioni e addizioni senza bisogno di rappresentare concretamente i termini dell' operazione.

5. *Sequenza come catena bidirezionale:* il bambino è in grado di produrre la serie numerica con facilità e flessibilità da qualsiasi numero e da qualsiasi direzione.

Concludendo secondo il pensiero della Fuson, anche se non si esclude una possibile competenza innata e genetica, viene considerata come variabile fondamentale che interviene nel processo di costruzione delle conoscenza numeriche l'interazione con l'ambiente; il bambino, pertanto, forma la propria conoscenza del numero attraverso la relazione con ciò che lo circonda.

1.5 “L’intelligenza matematica” secondo Butterworth

La tesi di fondo di Butterworth (1999) è quella dell’ipotesi del “cervello matematico” in contrapposizione a quella dell’invenzione-diffusione. In altri termini, tutti nasciamo con un cervello che contiene uno specifico “modulo numerico” che classifica il mondo in termini di numerosità. Le capacità del modulo sono state estese dalle risorse culturali.

I bambini, anche di pochi mesi reagiscono alle modificazioni del numero degli oggetti presentati, hanno “aspettative aritmetiche”.

Il collegamento tra le capacità innate del bambino di percepire le numerosità e le acquisizioni matematiche più avanzate è costituito dalla capacità di contare. Butterworth risolve un’apparente contraddizione: se i bambini nascono con la “capacità innata di contare”, perché impiegano circa sei anni, dai due agli otto anni, per potersene servire in modo pieno?

Butterworth cita nell’ordine le capacità pratiche delle quali i bambini hanno bisogno e le difficoltà che devono affrontare:

1. conoscere i vocaboli: per esempio per contare fino a cinque necessita di cinque parole e ripeterle sempre nello stesso ordine;
2. collegare ciascuna parola ad uno – e uno solo – degli oggetti: nessuna parola deve essere utilizzata più volte, e tutti gli oggetti devono essere contati. Bisogna cioè creare una corrispondenza biunivoca tra parole – oggetti;
3. capire che l’ultima parola (ad esempio cinque) va ripetuta per indicare proprio l’obiettivo che ci si era prefissi: l’ultima parola del conteggio è il numero degli oggetti contati.

Secondo Butterworth non è facilissimo imparare la sequenza verbale dei numeri (talvolta i bambini pensano a “unoduetrequattrocinque” come un’unica parola) e occorre un po’ di tempo perché apprendano che si tratta di più parole; per sequenze più lunghe sarà difficoltoso imparare quelle giuste.

Imparate le parole, un'ulteriore difficoltà è data dal fatto che i numeri sono legati a vocaboli talvolta dell'uso più disparato nella vita quotidiana (dai numeri telefonici, a quelli dei canali televisivi, degli edifici…) è fondamentale quindi che riescano a distinguere i numeri–parole per contare. Questa fase è affrontata, e non del tutto risolta, tra i due e i tre anni.

Invece, la corrispondenza biunivoca, in modo del tutto indipendente, è acquisita intorno ai due anni e mezzo. Tutti sono in grado di distribuire un dolce ad ogni persona o di indicare le persone presenti in una fotografia indicando tutti persone od oggetti.

L'acquisizione della capacità di dire l'ultima parola del conteggio come numero degli oggetti contati è acquisita dai bambini tre anni – tre anni e mezzo quella che per la Gelman (1978) è il principio di cardinalità. È però possibile che se si chiede ad un bambino di contare quattro oggetti, sia in grado di dire correttamente uno – due – tre – quattro; se gli si chiede a questo punto "quanti sono" è facile che ricominci a contarli. Può darsi che non capisca che il processo del contare fornisce la numerosità richiesta, ma può anche darsi che possa pensare che l'adulto abbia scoperto un errore e gli chiede di contare di nuovo. Basterà, comunque, qualche mese perché, almeno per piccole numerosità (tre o quattro), tutti i bambini siano in grado di afferrare la numerosità e che contare è il processo per scoprirla.

Inoltre, secondo Butterworth (1999, p.124) affinché la capacità di contare sia pienamente acquisita i bambini devono sapere che:

- non ha importanza in quale ordine gli oggetti sono contati;
- non ha importanza di quale tipo siano gli oggetti: possono essere concreti, ma possono inoltre essere azioni o suoni.

La Gelman definisce questi principi dell'irrilevanza dell'ordine e principio di astrazione.

I principi del contare sono complessi; l'immediatizzazione (come la chiama Butterworth) o la subitizzazione, cioè il percepire a prima vista la numerosità, potrebbe favorire nei bambini il capire che quando contano uno – due – tre ottengono lo stesso numero che avevano percepito a prima vista.

Per Butterworth, all’età di circa quattro anni, l’immediatizzazione, già presente, viene usata nell’uso delle dita sollevate nel conteggio accompagnate dal significato verbale delle parole che esprimono le numerosità, alla scoperta degli strumenti concettuali forniti dalla cultura. Per tutti la struttura innata può funzionare solo sino a quattro; la prassi dominante nel mondo è la base 10 e, pertanto, dobbiamo imparare il sistema dei simboli numerici, basato sulla notazione posizionale: in questo ambito, i bambini di lingua cinese di quattro, cinque e sei anni godono di uno straordinario vantaggio nei confronti dei bambini di lingua inglese ed europea.

I cinesi, infatti, superate le difficoltà dei primi dieci numeri (tra l’altro foneticamente monosillabi, con ulteriore vantaggio per la memorizzazione) non ci sono più problemi poiché non devono imparare altri vocaboli: “l’undici” e il “dodici” in italiano sono in cinese “dieci – uno, dieci – due; il venti sarà due – dieci e così via. Analoga argomentazione è sviluppata da Dehaene (1997) il quale, rileva inoltre, che i cinesi conservino durante tutto l’arco degli studi, dovunque inseriti, una capacità di calcolo mentale superiore rispetto ai coetanei di altre lingue altre lingue.

Sembra, pertanto, che le difficoltà nel contare dei bambini piccoli possano dipendere più dalle difficoltà dell’apprendimento dei vocaboli, e più oltre dalla posizione dei simboli numerici che da incapacità proprie dei bambini; fermo restando il rispetto per la teoria Piagetiana secondo la quale il numero non viene “conservato” in presenza di trasformazioni dell’insieme proposto probabilmente è stato trascurato il rilievo da dare all’apprendimento dei vocaboli.

1.6 Dehaene e il suo “pallino della matematica”

Nel suo “il pallino della matematica” Stanislas Dehaene (1997) sostiene, in accordo con Butterworth che parla di un modulo numerico di natura genetica, che siamo dotati sin dalla nascita di una rappresentazione mentale delle quantità molto simile a quella di molti animali, dai ratti alle scimmie.

Si tratta di una capacità ereditata dalla nostra storia evolutiva che ci permette di fare una stima rapida della grandezza di un insieme e ci accompagna, inoltre, anche quando siamo in grado di capire numeri pronunciati o scritti in forma simbolica; la matematica più avanzata sarebbe sbocciata dall'intuizione delle grandezze numeriche che abbiamo ereditato dall'evoluzione. L'evoluzione delle specie è un meccanismo conservatore: quando compare un organo utile la selezione naturale fa in modo che passi alle generazioni successive. Per molte specie animali la percezione della quantità si è rivelata un meccanismo che ha consentito la sopravvivenza della specie, nell'affrontare nemici o alla ricerca di fonti di cibo.

L'Homo sapiens ha senz'altro ricevuto la stessa eredità. Rispetto agli animali possediamo la singolare capacità di concepire vasti sistemi simbolici, abbiamo inventato il linguaggio matematico; siamo dotati di un organo cerebrale che ci consente il linguaggio, cioè la trasmissione del sapere e, infine, abbiamo una complessa capacità progettuale, fondata sulla memoria del passato e sulla previsione del futuro. Il meccanismo di base di comprensione delle quantità numeriche è posseduto comunque dal cervello umano alla pari del mondo animale.

Alcuni aspetti elementari dell'aritmetica sarebbero compresi dai bambini fin dal primo anno di vita, e sarà questo meccanismo a guidare l'apprendimento della matematica.

Prima degli anni Ottanta nessuna esperienza metteva in dubbio il dogma Piagetiano secondo il quale i bambini molto piccoli sono sprovvisti del concetto di numero. A partire da Melher e Bever numerosi sono stati gli esperimenti che si sono rivolti sino a bambini di pochi giorni. Nel caso di bambini al di sotto di un anno la tecnica utilizzata è stata la misurazione del tempo di attenzione rivolto verso diapositive o foto o oggetti di ogni tipo. I bambini mostrano sempre più attenzione ogni volta che cambia il numero più ancora rispetto al cambio di oggetti, stessa reazione è stata misurata relativamente al numero dei suoni. Dehaene è, inoltre, convinto che già nel primo anno di vita esistano delle capacità di calcolo. È dimostrato fin dai cinque mesi che il bambino, contrariamente a quanto sostenuto da Piaget, sa che gli oggetti continuano ad esistere anche se non sono più visibili; se i bambini di quella età non superano i test Piagetiani di permanenza dell'oggetto, ciò è dovuto all'immaturità della corteccia cerebrale che controlla i movimenti di presa: se non cercano con la mano un oggetto nascosto non vuol dire che lo credano scomparso. Su questo assunto, Winn e poi lo stesso Dehaene hanno condotto delle sperimentazioni fondate sul tempo dedicato ad esaminare una scena nella quale sono presentati degli oggetti che passano davanti al loro sguardo e poi nascosti dietro un telo (nel caso della sperimentazione di Dehaene con un sistema montante). Se al bambino sono passati davanti due oggetti, si aspetta un risultato preciso come il due; se gli viene presentato un risultato diverso, con tre oggetti invece dei due attesi, già a cinque mesi il bambino osserva a lungo la situazione impossibile. Dehaene (1997, p. 61) ipotizza che i bambini sappiano che 1+1=2; inoltre hanno rilevato con sorpresa anche che 2-1 risulti 2 o 3.

Naturalmente poiché nel primo anno di vita il cervello del bambino possiede il massimo della plasticità, cioè, è in grado di assimilare una quantità enorme di informazioni, e probabilmente anche la capacità di "contare" e "sommare"; a tutt'oggi lo scenario dell'evoluzione dei numeri nel primo anno di vita è tutto fondato su ipotesi peraltro plausibili:

- Già alla nascita il bambino ha eccellenti capacità di distinzione numerica. Il "modulo" di riconoscimento dei numeri è organizzato per maturazione cerebrale, sulla base di informazioni codificate geneticamente.
- I rilevatori numerici sono sia visivi che uditivi. Al momento nessuna ricerca è in grado di affermare che queste modalità sensoriali convergono, cioè che i bambini mettano in relazione due–tre suoni con due–tre immagini, sin dalla nascita. La relazione è dimostrata per bambini di sei–otto mesi ed è possibile sia una capacità acquisita per apprendimento. Dehaene propende anche in questo caso per capacità genetiche.

A circa tre anni e mezzo il bambino si destreggia già nell'arte del contare. Sino a quell'età i bambini hanno capito "come" si conta, ma non sanno "perché"; quello che la Gelman chiama capacità cardinale. Il bambino scopre che l'ultima parola gode di una particolarità: rappresenta una quantità numerica equivalente a quella fornita dall'

”accumulatore interno” (il modulo numerico di Butterworth); contare, quindi, serve a dire “quanto”.

Da quel momento i bambini diventano ingegnosi inventori di algoritmi; inventano spontaneamente decine di utilizzazione del far di conto e, ancora, secondo Dehaene (1997, p. 134) “riescono a sommare e a sottrarre senza che nessuno glielo insegni”.

Il primo algoritmo di questo tipo consiste nell’addizionare due numeri ricontandoli integralmente sulle dita. Il sistema è efficace, ma lento; in pochi mesi, intorno ai quattro anni non ricorrerà più alle ma dita solo alle parole, contando sempre tutti i numeri (ad esempio: 2+4 ripeterà due, tre, quattro, cinque, sei); nell’anno successivo dapprima conterà solo a partire dal secondo numero, e in breve scopre che è conveniente partire dal numero più grande. A cinque anni questo principio, cioè quello commutativo dell’addizione è praticamente acquisito.

Per Dehaene, l’insegnamento della logica che, per la matematica moderna dovrebbe precedere l’intuizione della matematica, invece, va spostata più avanti: il bambino attraverso i suoi calcoli intuitivi “scopre” proprietà per le quali i fondamenti logici possono essere imparati più tardi.

Superato lo scoglio dei primi dieci numeri, i bambini scelgono i propri algoritmi logici. È frequente che dopo la scoperta del minimo (il 2+4 che diventa 4+2), davanti a problemi più complessi del tipo 8+4 sia in grado di scomporre il 4 in 2+2 e contare 8+2 fa 10 (e lo memorizza per riutilizzarlo) e 10+2=12.

Anche nel caso delle sottrazioni, sempre in età prescolare, dinnanzi a differenze, sceglie le strategie più efficaci. Davanti a 8-2=6 conta all’indietro (7, 6); davanti a 8-6=2 parte dal 6 e aggiunge sino ad arrivare a 8 (7, 8; quindi 2).

Pertanto, secondo Dehaene (1997, p.155) prima di andare a scuola il bambino dispone già di una notevole capacità di conteggio. Non sempre però questo bagaglio matematico informale viene considerato un fatto positivo; ad esempio, contare sulle dita viene talvolta ritenuto un atteggiamento infantile da eliminare; eppure si tratta di un prezioso strumento per assimilare la base dieci.

Non valorizzare le conoscenze precoci dei bambini può avere un effetto disastroso sul resto della loro carriera scolastica. Si rischia di trasmettere nei bambini l'idea che la matematica sia una materia arida, staccata da ogni intuizione. Dehaene cita un esempio: a bambini di sei e di nove anni è stato chiesto quanto fa 5+3-3; i bambini di sei anni rispondevano sistematicamente 5 e, soprattutto,senza fare calcoli, e osservando giustamente che "+3 e –3" si annullano; i bambini di nove anni per arrivare a 5 facevano sempre una doppia operazione "5+3=8; 8-3=5" sostenendo che "per risolvere un problema occorre necessariamente fare i calcoli non fare i calcoli vuol dire imbrogliare". Se l'intuizione è scoraggiata, l'insegnante è condotto al fallimento.

Alcune ricerche sostengono che circa il 6% dei bambini in età scolare negli Stati Uniti ha rendimenti così disastrosi nelle prove di matematica che, secondo gli studi di Geary possono essere paragonabili a quelli che soffrono di un vero handicap neurologico. È probabile che si tratti di allievi normalmente dotati che si sono convinti che l'aritmetica è una materia senza scopo e senza significato aggiungendo alle difficoltà vere della materia una vera e propria fobia; questa situazione presentata da Dehaene non è molto lontana dai nostri studenti italiani. È indispensabile costruire le conoscenze matematiche nel cervello dei bambini su qualcosa di concreto e non sull'astrazione; le operazioni matematiche hanno un significato intuitivo; i bambini possono rappresentarle servendosi del loro senso innato delle quantità; bisogna aiutarli a "costruirsi" una ricca esperienza di modelli mentali.

1.7 Uno sguardo in Italia: il contributo di B. D'Amore

Questo campo di studio assai importante, la costruzione del numero nel bambino, risulta essere un nodo fondamentale, sia per gli insegnanti della scuola primaria (elementare ieri) che per gli insegnanti della scuola dell'infanzia (materna ieri).

Il vasto panorama di studi ha le sue radici in Piaget per arrivare negli ultimi anni a interessanti ricerche in Europa e nel mondo, dalla Francia, all'Inghilterra, all'America e trova in Italia un valido centro di ricerca tra cui va senz'altro ricordato Bruno D'amore.

Probabilmente la scuola italiana è ancora oggi eccessivamente "ancorata" alla prospettiva Piagetiana, che risulta essere eccellente e validissima, ma nello specifico della "costruzione del simboli" nel bambino, negli ultimi decenni si sono aperte nuove prospettive. In Italia precursore di queste nuove ricerche è Bruno D'amore.

Come Dehaene e Butterworth, anche se con approcci di ricerca differenti, secondo la prospettiva italiana la formazione del pensiero matematico nel bambino comincia assai presto; il processo di costruzione delle fondamentali conoscenze e competenze matematiche è un processo che si svolge a lungo nel tempo, inizialmente in modo informale grazie al contesto familiare e sociale, poi a poco a poco sempre più in modo formale e sistematico, via via che l'esperienza scolastica avanza.

La scuola dell'infanzia e la prima elementare costituiscono quegli anni che contribuiscono in maniera decisiva a sviluppare e rafforzare le "abilità matematiche" del bambino.

Secondo questa nuova prospettiva i bambini hanno già numerose intuizioni sul numero, e di certo specifiche attività nella scuola dell'infanzia rafforzano e stimolano, ma non "creano" poiché un'immagine del numero c'è già. (D'Amore, 1995).

"L'avvicinare" il bambino al simbolo numerico non è di certo un'esperienza così impossibile che a volte, sia nella scuola dell'infanzia che nella scuola elementare, è ostico per gli insegnanti, poiché, forse per troppo tempo, è prevalsa l'idea che il bambino non è pronto all'apprendimento del numero. Nella realtà già inconsapevolmente nella scuola dell'infanzia si svolgono quotidianamente attività di simbolizzazione, basti pensare che in moltissime scuole è d'uso ormai consueto che ogni bambino abbia un simbolo disegnato su un cartellino che lo rappresenta; dietro questa accettazione del simbolo che “rappresenta” un bambino c’è molta matematica.

Il bambino, quindi va considerato sempre una risorsa ricca di esperienze e d’idee, compito della scuola è saper sviluppare queste straordinarie potenzialità possedute dai bambini; di certo un ricercatore e un insegnante non possono dimenticare che il bambino possiede in sé capacità numeriche, e fin da piccolo è immerso in un mondo pieno di numeri.

Secondo Bruno D’Amore (1995, p.25) l’atteggiamento che l’educatore deve assumere su questa nuova strada è “saper sfruttare l’esperienza, saper fare uso di un ampio bagaglio linguistico, almeno in parte essere consapevoli dell’esistenza di quella che gli psicologi chiamano K-tacita (conoscenza tacita) che, spesso, è difficile da esprimere a parole; occorre saper “tradurre” il modello interno in una produzione esterna”.

Continuando la mia ricerca che è iniziata con interesse e curiosità dagli studi di Butterworth e Dehaene ha trovato ancora una conferma in questa prospettiva italiana che Bruno D’Amore (1995, p.29) sintetizza così: “il bambino sa contare”. Contare implica differenti aspetti:

- Avere consapevolezza che esiste un primo numero e che dopo di questo ne esiste un altro che è il successivo, in un processo che prosegue;
- Conoscere i nomi dei numeri che si susseguono nella conta.

Nelle lingue moderne, di solito vi sono almeno dieci nomi distinti per i numeri da uno a dieci e poi si costruiscono i nomi dei numeri utilizzando i nomi precedenti, combinati in varie forme; in italiano però esiste qualche difficoltà: da undici a sedici c’è la combinazione dei nomi dell’unità e della decina, poi c’è una rottura di regola con diciassette (decina e unità) con inversione dei due nomi così fino al diciannove, ma con il venti inizia una regola facile che continua senza più grandi interruzioni.

Anche grazie alla conta spontanea, che si presenta ben presto nei bambini, si contribuisce alla formazione del numero; anche se presenta qualche imperfezione linguistica il bambino sa contare.

Il bambino non può più essere considerato “tabula rasa”, occorre incentivare ciò che sa e sa fare, è molto più produttivo per i futuri processi di apprendimento/insegnamento, che l’insegnante sappia riconoscere e sfruttare in positivo le capacità del bambino. Se si inizia questo processo di “tirar fuori” le capacità possedute dai bambini la matematica che emerge in modo spontaneo è tanta, si vedrà che i bambini sono già in grado di dominare vaste tipologie di problemi o di situazioni, o di fatti e fenomeni della realtà con capacità che possono proprio essere chiamate matematiche (D’Amore, 1995).

Gli stessi orientamenti del 1991 non mettono in discussione queste abilità possedute dai bambini, infatti così recitano: “*intorno ai tre anni il bambino esprime le prime intuizioni numeriche, come valutazioni approssimati della quantità nel contare gli oggetti, nel confrontare le quantità e le grandezze… verso i sei anni, operando con oggetti, disegni, persone, ecc… è in grado di contarli, di valutarne la quantità e di eseguire operazioni sempre sul piano concreto, di ordinarli per grandezza, di classificarli”*

Anche le “*Indicazioni Nazionali per i piani personalizzati delle attività educative nella scuola dell’Infanzia,* e le relative *Raccomandazioni,* sottolineano l’importanza dell’apprendimento della matematica a scuola dell’infanzia. Tra gli obiettivi specifici di apprendimento, individuati dalle Indicazioni Nazionali ricordiamo: *”Contare oggetti, immagini, persone; aggiungere, togliere, valutare le quantità; ordinare raggruppare per colore, forma,grandezza.”* *Le Raccomandazioni,* inoltre valorizzano le esperienze e le intuizioni che ha già il bambino di tre anni sul numero.

Molto presto i bambini hanno a che fare con i numeri, li riconoscono come tali e li usano un’ampia varietà di riferimenti e funzioni. La costruzione del concetto di numero è, comunque, un processo lungo e complesso, un’impresa che i bambini realizzano sotto l’influenza della famiglia, dell’ambiente socio-culturale in cui sono inseriti e della scuola. Probabilmente, purtroppo, è ancora oggi troppo diffusa la convinzione che i bambini non possiedano per niente il concetto di numero e che pertanto tocchi alla scuola farlo acquisire e produrne la padronanza.

Se si considera quest'ipotesi basta cercare le reali competenze dei bambini in ingresso alla scuola elementare, guardando fra le possibili esperienze fatte, sia in ambiente cognitivo spontaneo, sia in ambiente cognitivo guidato. I bambini chiedono soldi per comprare le figurine, sanno a che ora c'è il programma preferito, fanno la spesa con la mamma, conoscono il numero di telefono della nonna, sanno quanti anni hanno il papà e la mamma; giocano insieme ai compagni al mercato, passeggiano per il quartiere cercando numeri di qualsiasi tipo, li leggono, li commentano. Tutto ciò è indicativo del fatto che i bambini vivano in un mondo fatto anche di numeri e che a cinque, sei anni sono piuttosto abili nel maneggiare questioni numeriche (Marazzani, 2004).

Un'altra importante abilità (che i bambini sembrano possedere) è il saper distinguere il numero dal non numero, cioè discernere fra numeri e lettere o altri simboli scritti.

Infine nel presente lavoro di ricerca, che mette in evidenza il "rapporto" fra il bambino e i numeri, di certo va posta l'attenzione, all'uso del numero scritto che fanno i bambini.

Secondo Bruno D'Amore (1995, p. 110) tra i quattro e i cinque anni i bambini cominciano a scrivere i numeri, o almeno tracciare dei segni che vorrebbero rappresentare il numero. La rilevazione delle strategie ingenue utilizzate dai bambini in questo ambito è un passaggio obbligato se si vuole fondare l'apprendimento sulle esperienze e sulle competenze dei bambini. L'aritmetica scritta richiede l'uso di simboli e convenzioni che non sono di facile acquisizione e presuppone un lungo processo di costruzione. (vedi paragrafo: 3.7)

Capitolo II: Gli approcci al numero naturale

2.1 Gli approcci al numero naturale

La matematica e il suo studio presenta tre inscindibili aspetti:

- Si sviluppa attraverso una serie di linguaggi, di forme e modi del pensare codificati all'interno di modelli astratti;
- Si serve di questi modelli per dare concretezza alle sue costruzioni e per reinterpretare la realtà stessa;
- Va intesa come scienza che provvede alla formazione del pensiero agendo sui processi mentali e sulle costruzioni logiche del ragionamento.

La matematica in tutte le sue sfaccettature, a partire dalla scuola dell'infanzia, assume un'enorme valenza formativa che finisce con definire modi e forme variegate di pensiero; attraverso di essa si acquisisce un modo di pensare che nasce, non solo dal conoscere e saper usare i numeri, ma dal ragionamento su di essi. In questo senso si forma oltre l'abilità del "Fare" ma soprattutto di saper "approcciare il fare, comprendendo ciò che si fa". (Cutrera–Lo Verde, 1999)

La complessa acquisizione del numero da parte del bambino, strettamente connessa con il pensiero e il suo sviluppo, necessita una pluralità di approcci che rappresentano altrettanti itinerari mentali e didattici e possono essere così sintetizzati:

- Approccio cardinale
- Approccio ordinale
- Approccio geometrico
- Approccio ricorsivo

Probabilmente negli untimi anni in Italia per avvicinare il bambino al numero sia nella scuola dell'infanzia che nella scuola elementare, si è un po' eccessivamente valorizzato e utilizzato l'approccio cardinale, dimenticando, invece, l'estrema importanza di tutti gli approcci e la loro correlazione di sviluppo con abilità differenti di pensiero.

Gli approcci certamente non si escludono, anzi il più svariato uso di tutti quattro favorisce una più completa e sicura formazione del concetto di numero.

Nei paragrafi successivi sono descritti i quattro approcci.[3]

2.2 Approccio cardinale

La concezione cardinale determina il numero di oggetti contenuti in un insieme attraverso il confronto con altri insiemi.

Per favorire una corretta acquisizione del concetto di numero naturale secondo l'approccio cardinale sono importanti le attività di:

[3] Per la descrizione degli approcci si fa riferimento a: Spagnolo, 1982: Cutrera-Lo verde, 1999.

- Classificare
- Mettere in relazione
- Effettuare partizioni secondo relazioni di equivalenza

L'approccio cardinale si sviluppa attraverso l'uso della "corrispondenza biunivoca" per il confronto tra insiemi e quindi le conseguenti caratterizzazioni di insiemi equipotenti.

Si definisce numero naturale "n" il contrassegno, l'etichetta ovvero il numero cardinale comune ad una classe di equivalenza, ogni numero naturale è quindi, nel suo aspetto cardinale, la rappresentazione di una classe di insiemi equipotenti.

La comprensione dell'invarianza del valore cardinale può essere acquisita dal bambino attraverso la coordinazione di due separate abilità cognitive:

- irrilevanza dell'ordine: considerare che elementi di un insieme sono da considerarsi uguali qualunque sia l'ordine secondo cui vengono presi in esame nel contarli;
- invarianza rispetto alle disposizioni spaziali: comprendere che il valore numerico di un insieme rimane inalterato anche se si compiono delle modifiche nella disposizione spaziale.

Il momento più significativo di questo processo di apprendimento si presenta quando si comprende pienamente il valore "tanti quanti".

Per il raggiungimento della comprensione e dell'uso consapevole del valore cardinale sono indispensabili le seguenti attività:

- formare insiemi;
- rappresentare insiemi e individuare relazioni di appartenenza;
- individuare l'insieme vuoto, l'insieme unitario, il sottoinsieme;
- individuare relazioni fra insiemi;
- confrontare insiemi;
- riconoscere e costruire insiemi equipotenti.

2.3 L'approccio ordinale

La concezione ordinale considera il numero di oggetti contenuti in un insieme non attraverso un confronto, ma attivando un processo di conta per cui l'ultimo numero pronunciato corrisponde al numero cardinale dell'insieme.

Le operazioni logiche che permettono un apprendimento del numero secondo l'approccio ordinale sono:
- confrontare;
- mettere in relazione;
- ordinare.

Mentre nell'aspetto cardinale il numero è visto sotto forma di quantità, nell'aspetto ordinale è visto come una sequenza ordinata. Per questo motivo sono indispensabili le relazioni spazio–temporali (davanti–dietro, prima–dopo) che determinano il controllo d'ordine e favoriscono la comprensione di successore e predecessore.

La comprensione che la successione dei numeri naturali è caratterizzata dalla relazione d'ordine non è di immediata acquisizione per i bambini. Infatti, i bambini, soprattutto nella conta sono perfettamente in grado di pronunciare correttamente la sequenza dei numeri e di determinare la cardinalità di un insieme; con difficoltà però comprendono pienamente la relazione fra i numeri.

È probabile che, il bambino anche se nella conta spontanea antepone il numero 3 al 4, non sempre si rende conto che il 4 è maggiore di 3, e nella successione ordinata si procede sempre attraverso l'aggiunta di uno cioè la relazione tra due numeri successivi è sempre n ed $n+1$ e viceversa n ed $n-1$.

Per facilitare la comprensione del successivo e del precedente il bambino deve possedere un uso consapevole dei concetti temporali "prima - dopo" e dei concetti topologici "davanti – dietro".

Per un pieno apprendimento del numero attraverso l'approccio ordinale sono indispensabili le seguenti abilità:
- distinguere le posizioni spaziali davanti-dietro
- usare consapevolmente i termini davanti e dietro
- distinguere e comprendere i concetti temporali prima-dopo
- confrontare quantità
- stabilire relazioni d'ordine fra i numeri
- usare i simboli < > =

2.4 L'approccio geometrico

Fin da piccoli i bambini soprattutto nelle situazioni di gioco fanno un uso spontaneo dell'approccio geometrico vanno ricordati in tal senso i giochi come ad esempio riprodurre passi di animali: tre passi da cane, due da formica, cinque da leone e così via("regina, reginella").

Questo ci fa comprendere che il bambino possiede un patrimonio di esperienze che nasce da un'attività di misura seppure risulta ancora "ingenua".

Bruno D'Amore (1995, p. 96) sostiene che il numero, secondo questo approccio esprime una misura, o meglio le quantità di unità di misura che servono per misurare una certa grandezza. Le espressioni di misura già fanno parte dell'esperienza quotidiana dei bambini e le sentono perciò familiari, i termini connessi con la stima e la misura (vicino, lontano, lungo, corto...) fanno già parte del loro vocabolario. I bambini cominciano spontaneamente ad utilizzare strumenti occasionali e personali di misura (un passo, un bastone...) ed esprimono la misura con un numero accompagnandolo a un'unità di misura arbitraria. Le occasioni di misurazione offerte dalla vita quotidiana e dal gioco sono molteplici e devono essere ben sfruttate dalla scuola.

Le attività di stima si manifestano spontaneamente dimostrando il loro profondo radicarsi nei comportamenti e nelle esperienze del bambino.

Quest'approccio è strettamente connesso con la tradizione geometrica greca che è fondamento del patrimonio culturale collettivo, inoltre, ha un buon impatto nell'apprendimento poiché questo percorso risulta essere molto vicino all'esperienza vissuta.

L'insegnante non può dimenticare questo patrimonio posseduto dai bambini anzi occorre rafforzarlo ed ampliarlo.
Non si può certo dimenticare che in questo approccio il numero indica sempre il risultato di una misurazione e deve

essere compreso attraverso la scoperta dell'unità di misura e del suo rapporto con la quantità da misurare.
Le abilità sottese che devono essere rafforzate e ampliate sono:

- riconoscere ed applicare relazioni d'ordine
- operare confronti di quantità
- operare confronti fra grandezze

2.5 L'approccio ricorsivo

I numeri di per sé sono un sistema ricorsivo, con ritmi sistematici. L'approccio al numero impostato sulla ricorsività e sulle leggi che la determinano si fonda sulle successioni e le regole che consentono la costruzione delle successioni stesse.

Questo approccio ha in sé qualità dinamiche e costruttive che lo caratterizzano per la sua interdisciplinarità; schemi ricorsivi si trovano nella lingua, nella musica, nella geometria, nelle rappresentazioni grafiche…

In questo approccio si comprende come funziona il sistema dei numeri naturali basandosi sull'idea di successivo: "ogni numero ha un'unità in più del numero che immediatamente lo precede ed un'unità in meno del numero successivo."

L'approccio ricorsivo ha, quindi, alla base l'idea matematica di successione, idea che è già presente nella mente del bambino grazie anche agli stimoli ricevuti dall'ambiente familiare e sociale. Tra le prime successioni che entrano inizialmente nell'organizzazione mentale del bambino sono le successioni temporali, e dopo quelle spaziali per poi arrivare all'idea di ricorsività nei numeri.

Il bambino fin da piccolo inizia la “conta spontanea” e svolge in maniera “ricorsiva” alcune attività di gioco: saltare, far rimbalzare la palla, disegnare figure in fila.

Anche da piccoli i bambini sono immersi in esperienze percettive, linguistiche, motorie che si fondano e si sviluppano su uno schema ricorsivo. Spontaneamente, in situazioni di gioco, con semplici materiali costruiscono composizioni ricorsive di oggetti (ad esempio un tappo rosso, uno blu, uno giallo, uno rosso, uno blu…)

A scuola per consolidare la consapevolezza dello schema ricorsivo si propongono esperienze di costruzioni di sequenze con cambi di colore, di forma, di dimensione…inoltre, per sviluppare questo schema si possono utilizzare alcune classiche filastrocche che si ripetono seguendo un approccio ricorsivo. (D’Amore, 1995).

Molto spesso negli ultimi anni per avvicinare il bambino all’approccio ricorsivo al numero naturale si è utilizzato il materiale strutturato, costruito proprio a far percepire un ritmo, un ritorno… però ancora oggi il dibattito sulla funzionalità di questi strumenti è ancora aperto in Italia.

Nel contare verbalmente in maniera intuitiva, il bambino dispone i numeri naturali seguendo uno schema ricorsivo, li dispone in fila in ordine crescente formando in maniera spontanea la “successione dei numeri naturali”.

Per rafforzare la comprensione del numero naturale attraverso l’aspetto ricorsivo possono essere proposte le seguenti attività:

- usare consapevolmente i termini davanti–dietro, prima–dopo, destra–sinistra
- riconoscere e continuare un ritmo grafico cromatico
- individuare sequenze
- costruire serie ascendenti e discendenti
- intuire che la serie naturale dei numeri si forma con l’aggiunta di un’unità.

2.6 I bambini e l’uso spontaneo degli approcci

I quattro approcci che portano all’acquisizione del numero naturale non sono da intendersi come strade separate ed autonome. Anche se ciascun percorso si differenzia dagli altri perché individua il suo filo conduttore in un particolare aspetto del numero naturale e su questo si articola partendo da attività specifiche funzionali e mirate mobilitando forme di pensiero finalizzate. (Cutrera, Lo Verde, 1999).

Secondo le nuove prospettive che considerano il bambino con già un patrimonio di abilità matematiche alle spalle, ha anche numerose intuizioni sul numero come ordinale, cardinale, come espressione di una misurazione e addirittura sul numero da un punto di vista ricorsivo anche se il numero più presente è il numero–etichetta.

Si prova stupore quasi quando i bambini usano con destrezza il numero nei diversi approcci anche con naturalezza. Quel che succede è una modalità d’uso a secondo della funzione; in tal senso, Bruno D’Amore (1995, p.30) fa notare che il bambino utilizza anche un tono diverso secondo l’approccio che utilizza, se utilizza il numero in senso cardinale mette un’enfasi diversa nel pronunciare l’ultimo numero della conta o lo ripete; in questo atteggiamento si vede bene come il bambino abbia consapevolezza della variazione d’uso del numero. Seppure ancora in modo approssimativo, i bambini già intuiscono che il numero può assumere funzioni e significati diversi: cardinale, per indicare la quantità di elementi di un insieme; ordinale per caratterizzare un elemento di un raggruppamento ordinato; ricorsivo, perché ogni numero ha un successivo generato dall’aggiunta del numero + 1; come espressione di una misura per determinare una data grandezza.

Nella prospettiva Piagetiana si considera il numero naturale prevalentemente sotto l’aspetto cardinale; in questo itinerario non si tiene conto delle idee di numero che i bambini già possiedono e che via via vanno costruendo.

È quindi da sottolineare che una buona educazione matematica, sia a scuola dell’infanzia che a scuola elementare, deve avvalersi di tutti e quattro gli approcci, soprattutto se si sottolinea il fatto che già i bambini possiedono in modo spontaneo un’idea di tutti e quattro gli approcci, in base all’esperienza quotidiana e agli stimoli forniti dall’ambiente. Questa loro visione del numero, che utilizzano in varie situazioni, soprattutto di gioco, va sviluppata e rafforzata.

L’attenta ricognizione delle esperienze vissute dagli alunni fa emergere che essi hanno avuto occasione di verificare i vari approcci al numero, di cui ciascuno di essi ha la loro importanza.

L’ordinalità, ad esempio, è correlata alle situazioni di vita quotidiana e di gioco in cui si risponde alle domande “Viene prima o dopo? Precede o segue?” le esperienze vissute in questo senso sono innumerevoli e si rifanno alle situazione di gioco, di gare, di sequenze temporali, nel mettere in fila… esperienze quotidianamente vissute dai bambini.

La cardinalità, invece, è correlata alle esperienze significative per domande del tipo: “Quanti sono? Chi ne ha di più?” nella realtà un bambino si trova spesso in queste situazioni, se deve confrontare ”la numerosità” di due insiemi; in queste situazioni adotta differenti strategie: se gli oggetti sono pochi e cioè per lui percettivamente dominabili potrà dare risposta corretta anche sulla base di una semplice “occhiata” (subtizing o immediatizzazione); se invece sono più numerosi inizia a metterli in corrispondenza uno a uno o procederà a contarli. Utilizzando quest'ultima strategia il bambino dimostra che ha già intuito i due principi più importanti della cardinalità: l'ultima parola pronunciata indica quanti oggetti o cose o persone sono state contate; che è in grado di saper usare la "conta" e cioè che i numeri sono tutti in fila.

Così anche il concetto di numero come misura è legato molte esperienze fatte dai bambini che utilizzano il numero "dimensionato" per esprimere un certo aspetto del concreto, appunto la sua misura; infatti dirà che ha usato una tazza di zucchero quando ha aiutato la mamma a preparare la torta; che ha fatto tre passi da leone in situazione di gioco… in queste esperienze il concetto di numero e la problematica della misura sono continuamente intrecciate e producono importanti intuizione nei bambini (Franchi, 1987).

È stato più volte sottolineato come i bambini possiedono "capacità matematiche", ma nello specifico cosa s'intende per contare? Quali abilità e processi ci sono dietro?

La procedura del contare esige il possesso contemporaneo di più abilità:

1. conoscere i nomi dei numerali in ordine esatto (frequenza verbale numerica);
2. saper toccare (o indicare o guardare) ciascun elemento di un insieme una ed una sola volta (o numerazione non numerica);
3. saper coordinare in un'attività motoria le due precedenti abilità.

Il bambino inizia ad imparare dapprima i numeri e successivamente riesce a individuare la struttura che gli permette di costruire la sequenza dei numeri; la seconda abilità si manifesta quando il bambino sa organizzare lo spazio percettivo e lo esplora in maniera sistematica senza omissioni o ripetizioni; la terza abilità si manifesta con una coordinazione dell'azione del prendere in considerazione gli oggetti (toccandoli, guardandoli) con quella di esprimere verbalmente la sequenza numerica in modo da far corrispondere ad ogni numero pronunciato un oggetto individuato. (Cutrera – Lo Verde, 1999)

Non si può certo dimenticare che il contare si estrinseca in due modi diversi:

- intransitivo: contare per contare, recitare la filastrocca dei numeri
- transitivo: contare azioni o oggetti, dando all'ultimo numero pronunciato un'intonazione diversa con la consapevolezza che rappresenta il totale dell'insieme contato.

A conclusione di questo capitolo si vuole sottolineare come una vera e propria formazione matematica deve assolutamente tener conto di tutti e quattro gli approcci, la correttezza disciplinare, psicologica e metodologica non deve lasciare al caso la razionalizzazione di nessuno degli aspetti o funzioni del numero.

Cap. III: I nostri antenati e i numeri

Durante la fase di ricerca del presente lavoro si è iniziato ad aprire un panorama sconfinato di contributi teorici, spunti di riflessione, risposte a domande a cui ne seguivano altre… E proprio in questo flusso continuo di informazioni si è voluto soffermare l'attenzione anche su una breve storia del numero, che ha accompagnato l'uomo fin dalla sua comparsa sulla terra.

Anche in questo caso sono stati validi e ricchi contributi le ricerche di Butterworth e Dehaene.[4]

3.1 La preistoria e le civiltà antiche

La preistoria del cervello matematico è tutt'oggi uno dei problemi più affascinanti di ciò che si può chiamare "archeologia cognitiva" cioè il tentativo di ricostruire la mente umana degli uomini preistorici. Tutt'oggi uno degli interrogativi che si pongono gli studiosi è: "I nostri antenati possedevano i numeri?" Ancora le risposte certe non sono

[4] Per la descrizione della storia del numero si è fatto riferimento a Butterworth, 1998; Dehaene, 1997

pervenute, ma gli studiosi sono all'opera. Ciò che sembra certo è che il numero inizia a comparire con le attività agricole e commerciali.

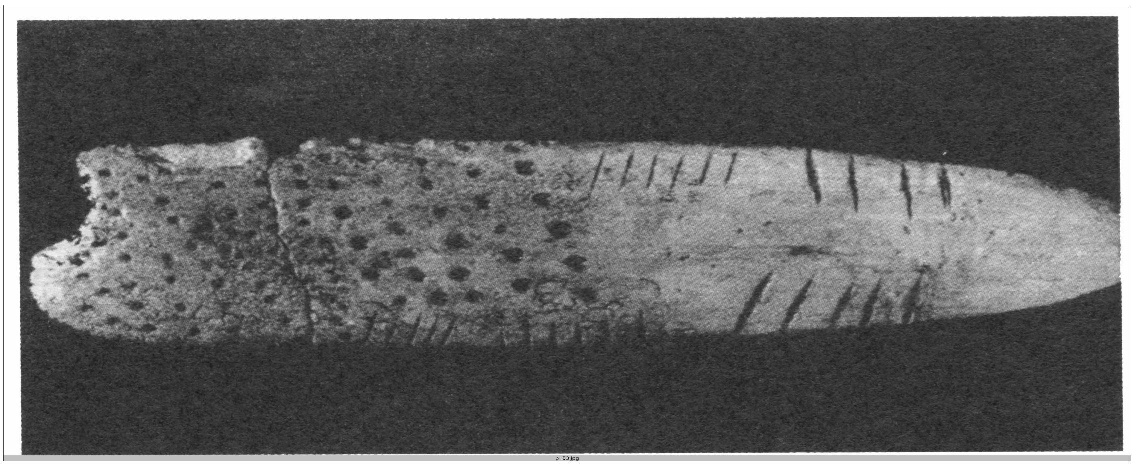


Fig. 1: *L'osso di Lartet,pervenuto in Dordogna, in Francia,risale a circa 30.000 anni fa; sono visibili gruppi distinti di segni; probabilmente i nostri antenati tenevano conto delle fasi lunari tracciando segni sulle ossa (Butterworth, 1999).*

Gli studiosi si chiedono se ancor prima dell'invenzione della scrittura e dell'agricoltura, ai tempi che i nostri antenati erano cacciatori-raccoglitori ed usavano utensili da pietra, se questi uomini possedevano un cervello matematico. Non si può affermare con certezza se usassero i numeri. La sola prova pervenuta fino ad oggi è data dai segni sui muri delle caverne, ma non si sa se erano in grado di usare i simboli numerici.

Durante il periodo Paleolitico (30.000 anni fa) nello specifico nel periodo superiore chiamato Magdaleniano, i nostri antenati producevano realistiche descrizioni pittoriche sia di animali che di uomini, ma non esiste alcuna certezza di una loro capacità di ragionamento logico o di pensiero astratto. Con grande stupore degli archeologi sono stati rinvenuti nelle caverne e sui manufatti portatili strani segni costituiti da punti e linee, triangoli e rettangoli.

Nel diciannovesimo secolo Eduard Lartet suggerì che alcuni segni sulle ossa fossero “tacche di caccia” ed indicavano il numero degli animali cacciati e ciò si accorderebbe con una datazione del “cervello matematico”.

Gli oggetti ritrovati con tacche assumono via via caratteristiche sempre più complesse fino ad ipotizzare l’esistenza di un sistema per basi.

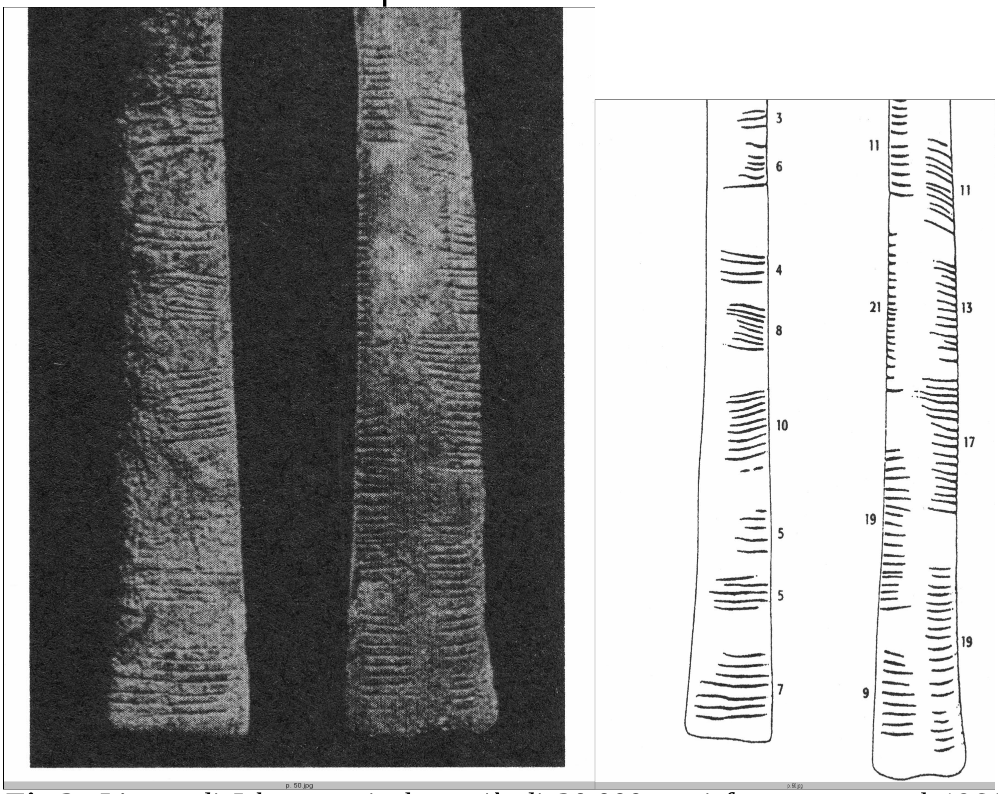


Fig.2: *L’osso di Ishango, risale a più di 20.000 anni fa, scoperto nel 1961 sulle rive di un lago in Africa Centrale; sono evidenti tre coppie di raggruppamenti per tacche che rappresentano alcuni numeri e il loro doppio, il che indica che i pescatori di quel periodo avessero il concetto di raddoppiamento e di numerosità; dall’altro lato sono presenti raggruppamenti per 10 (Butterworth, 1999)*

Nel diciannovesimo secolo, fu decifrata la scrittura cuneiforme ed emerse che i Sumeri e i Babilonesi possedevano simboli numerici almeno dal 3000 a.c.; furono trovate tavolette d’argilla sulle quali sono incise tavole per eseguire moltiplicazioni, e radici quadrate e cubiche. La principale ragione d’uso delle tavole era di origine economica. Mentre noi usiamo un sistema decimale, i Sumeri e i Babilonesi usavano un sistema numerico in base dieci e sessanta (che sopravvive tutt’oggi nelle nostre culture come ad esempio nella misurazione degli angoli e del tempo).

Numerosi studi hanno cercato di interpretare i pittogrammi che rappresentavano oggetti di vita reale, che gradualmente assumono significati più astratti fino ad essere unità di misura o numeri.

A partire da 10.000 anni fa i popoli dell'area mesopotamica erano in grado di usare i numeri per commerciare, tenere la contabilità, misurare… essi avevano sviluppato un sistema di numeri in base dieci che veniva rappresentato su tavolette d'argilla.

Le tessere più antiche scoperte fino ad oggi, risalenti a 10.000-11.000 anni fa, sono state trovate nella Turchia Meridionale, in Iran e in Sudan, ma secondo gli archeologi per essersi diffuse a quell'epoca su un'area così ampia, dovevano avere avuto un origine ancor prima.

Il primo principio di conteggio probabilmente aveva solo due numeri "uno-due", i numeri maggiori potevano essere costruiti combinando questi due. Le ipotesi secondo le quali si è arrivati a questo sistema numerico sono differenti: secondo alcuni si trascinò dal mito della Creazione in cui troviamo delle coppie complementari (cielo-terra, luce-tenebre…), il contare fu quindi inventato in un centro civilizzato nell'elaborazione del mito della Creazione; una seconda possibilità nasce dall'esigenza di tenere una contabilità; infine un'ultima ipotesi trae le sue origini dal corpo umano la cui più semplice divisione è duale (destra-sinistra).

Il bisogno dei nostri antenati di fare registrazioni numeriche permanenti ci offre una straordinaria opportunità di guardare nella loro mente, di come affrontano il concetto di numerosità e di come svilupparono le idee basate su di esso

3.2 La costruzione dei simboli numerici

Spesso nella costruzione dei simboli numerici le varie culture hanno costruito differenti principi usati sia distintamente che contemporaneamente:

- Principio della numerazione con le tacche:insiemi di segni incisi su ossa dell'era glaciale o di punti sulle pareti delle grotte; sono ad oggi i più antichi “Simboli numerici permanenti”, essi rappresentano semplici numerosità la cui origine si trova in tutto il mondo. L’incisione di tacche è una delle manifestazioni più semplici e chiare del concetto di numerosità

- Il principio dell’insieme: il principio della numerazione con le tacche non è utilizzabile per numeri troppo grandi si è passati perciò ad una fase nella quale la numerosità di un’insieme è stata indicata con un unico simbolo.
- Il principio di composizione additiva: poiché ciascun numero -a parte 1– è la somma di altri numeri, abbiamo sufficienti tracce che presso gli Egizi e i Sumeri era usato spesso questo principio.
- Il principio dell’insieme degli insiemi: non è altro il significato più immediato della moltiplicazione. Gli Egizi non avevano segni espliciti di questa operazione, ma avevano segni speciali per multipli della potenza di dieci.
- Principio della base: la base degli Egizi era 10; i Babilonesi usavano la base 60. si tratta di una base scomponibile in numerosi fattori: 2, 3, 4, 5, 6, 12, 20, 30 che rendeva, quindi, facili i calcoli, anche delle frazioni. Il sistema sessagesimale è a tutt’oggi utilizzato nella divisione dell’ora in minuti e in quella dei minuti in secondi e, inoltre, nella misurazione degli angoli.
- Principio delle operazioni ricorsive: comporta l’applicazione di una regola in modo ripetuto, sino ad ottenere il risultato voluto è tipico del nostro sistema decimale. Qualsiasi numero infatti può essere moltiplicato per 10, o per qualsiasi potenza di dieci semplicemente aggiungendo tanti zeri quante volte è necessario; per numeri di difficile lettura possiamo utilizzare la notazione esponenziale. Tutti i sistemi dell’antichità si mostrarono inadatti per esprimere numeri realmente grandi. I simboli cuneiformi utilizzati dai Babilonesi consentivano la scrittura di numeri grandi, ma con operazioni talvolta di addizione e altre di moltiplicazione (nel passaggio da 1 a 60); i numeri grandi sono di difficile lettura. Gli Egizi utilizzavano sempre simboli diversi per potenze di 10. Ancora meno efficiente il sistema Romano, che aveva a disposizione pochi simboli, soprattutto, usava la posizione solo per operazioni di sottrazione-addizione e non di moltiplicazione,

come nel sistema decimale, rendendo ardua la trascrizione di numeri grandi;

- Principio del valore posizionale: è la grande rivoluzione del sistema decimale arrivano i numeri arabi, che utilizzano soltanto nove segni più lo zero.

Sino all'avvento dei numeri arabi in tutta l'antichità si hanno grosse difficoltà per rappresentare numeri particolarmente grandi; inoltre, i simboli utilizzati non si prestano molto a calcoli complessi. Il punto di forza del nostro sistema numerico, oltre al principio del valore posizionale è dovuto all'invenzione dell' "insieme vuoto", del nostro zero. I numeri sono impropriamente detti arabi perché pur essendo stati introdotti in Europa da mercanti Arabi, non furono inventati da questi. Nell'VIII secolo gli Arabi non avevano nemmeno simboli numerici e scrivevano i numeri con parole. Nel 773 d.C. il califfo di Baghdad ricevette una copia del Brahmasphutasiddhrta un trattato astronomico scritto almeno centocinquanta anni dall'astronomo indiano Brahmagupta, che usava la notazione posizionale e lo zero.

Fu il matematico Muhammad Al-Khuwarizmi che utilizzò il metodo nel calcolo nella sua importante aritmetica. Dal nome del matematico arabo derivò la parola algoritmo. Sembrerebbe che lo zero sia stato inventato da matematici indiani. Invece nella valle dell'Indo almeno 2000 anni fa è sicuro che fosse diffusa l'idea che i numeri si estendono indefinitamente e veniva usato un segno speciale, anche se solo per le misure angolari di valore nullo.

Nell'America Centrale i Maya intorno al 400 a.C. avevano già sviluppato in maniera del tutto indipendente un sistema di numerazione in base 20 e usavano già una notazione posizionale.

3.3 L'avvento della scienza

Quale fu l'impulso che diede origine alle notazioni numeriche? Certamente è stato importante il commercio che ha creato il bisogno una registrazione scritta dei numeri. Il commercio da solo però non spiega lo sviluppo di metodi per parlare e scrivere dei numeri molto grandi. Probabilmente lo sviluppo del sistema numerico fu favorito dalla scienza; infatti l’evoluzione scientifica e i tentativi di compiere misure precise portarono a grandi sviluppi dei sistemi numerici fino all’evoluzione delle frazioni e dei decimali.

3.4 Dalla notazione cuneiforme alle cifre romane

Le prime notazioni matematiche sono dei fossili viventi: una serie di intagli che testimonia un conteggio, l’inizio della notazione simbolica. Questo metodo di notazione mediante una corrispondenza biunivoca è un’invenzione importante perché offre una rappresentazione dei numeri precisa e astratta. Tale procedimento non è però privo di errori. Infatti non è molto comoda da scrivere né da leggere, soprattutto per cifre superiori a 3, ricordando che la visione umana è incapace di riconoscere a colpo d’occhio un insieme costituito da più di 3-4 elementi. Ben presto gli uomini raggrupparono le incisioni e introdussero simboli nuovi. L’incisione in verticale fu sostituita per numeri superiori a tre da barre oblique (XV) ed è proprio questa l’origine delle cifre romane le cui forme geometriche lineari sono determinate dalla facilità con cui possono essere incise; la ripetizione di questi simboli permette di esprimere, entro certi limiti, tutti gli altri numeri con la semplice addizione o sottrazione: VI (5+1), IV (5-1).

Principi analoghi vennero utilizzati da Egizi, Sumeri, Aztechi. Ciò consentì un salto di qualità rispetto alle tacche, consentendo una notevole economia di mezzi rispetto alle tacche. Ad esempio per rappresentare un numero come 30 anziché trenta tacche si poteva segnare XXX; ma per diffondere la rappresentazione di numeri veramente grandi, al di là delle intuizioni esponenziali degli Egizi, si è dovuti attendere la diffusione dei numeri arabi, che, con la regola della posizione e con l’utilizzazione dello zero consentono di rappresentare qualsivoglia numero.

Il sistema di rappresentazione, dei numeri romani, permette una maggiore facilità nella trascrizione di queste cifre rispetto alle tacche, anche se l’esercizio resta difficoltoso e la lettura scomoda. È stato possibile abolire le ripetizioni adottando un numero distintivo per ciascuno dei numeri da 1 a 90 e da 100 a 900. Questa fu la soluzione degli Ebrei e dei Greci; per scrivere un numero complicato come 345 furono sufficienti solo tre lettere questo però richiedeva uno sforzo di memoria per ricordare il valore di ventisette simboli che permetteva di esprimere tutti i numeri da 1 a 999.

3.5 Le cifre Arabe

Ma come in realtà si è arrivati alle cifre che usiamo oggi, comunemente chiamate cifre Arabe? Lo straordinario cambiamento è da attribuire al valore posizionale delle cifre e al dare un simbolo allo zero.

È da sottolineare però, che gli Arabi non inventarono né i simboli numerici usati oggi, né lo zero. Sembra che gli Arabi dell'ottavo secolo non avessero affatto simboli numerici e che addirittura scrivevano le quantità come parole persino nei testi matematici. Ma nel 773 d.C. il Califfo di Baghdad ricevette una copia di un trattato astronomico, un'opera compilata ben 150 anni prima, in quest'opera per la prima volta veniva usata l'annotazione posizionale e lo zero.

Per questo motivo non è esclusivamente agli Arabi da attribuire la nascita di queste nuove cifre; ma nell'820 fu proprio un arabo Muhammad Al-Khuwarizimi a scrivere la sua famosa aritmetica su questi nuovi numerali del calcolo. Il libro fu successivamente tradotto in latino ed ebbe un'ampia diffusione in Europa a partire XII secolo, probabilmente è proprio da attribuire a questo matematico arabo il metodo di raggruppamento delle cifre a tre a tre partendo da destra verso sinistra usato tutt'oggi.

Da chi fu inventato lo zero, elemento che ha cambiato totalmente il sistema di numerazione? Probabilmente i simboli numerici usati tutt'oggi derivano dagli Indiani.

I matematici indiani avevano un ingrediente segreto: la "poesia"; in alcuni poemi indiani risalenti al 300 a.C. troviamo numeri scritti in forma di parole con un valore posizionale, questi non erano vocaboli numerici ma parole che evocavano il numero; ad esempio 1 sarebbe potuto essere scritto "luna", dato che ne esiste una soltanto, per due "braccia"...

Le parole per lo zero, invece erano molte tra cui “sunya” che significa vuoto, ma anche altre parole riferite a completo, buco, intero...

Usando i “vocaboli numerici” si costruiva una vera e propria fase poetica, così 1201 poteva diventare “luna, ali, buco, luna”.

Ma il passo straordinario che portò ai predecessori delle nostre cifre moderne, fu l’adozione di simboli speciali chiamati numeri di Gwalior, la cui iscrizione più antica risale all’870, con la prima volta la notazione posizionale e lo zero.

Da questo punto iniziano a comparire iscrizioni dei primi simboli che arriveranno successivamente a perfezionarsi e a diventare i nostri simboli numerici usati quotidianamente, con il 2 e il 3 quasi identici ai nostri simboli.

Questa evoluzione è ben chiara e visibile, e così sintetizzata dallo storico della matematica Graham Flegg.

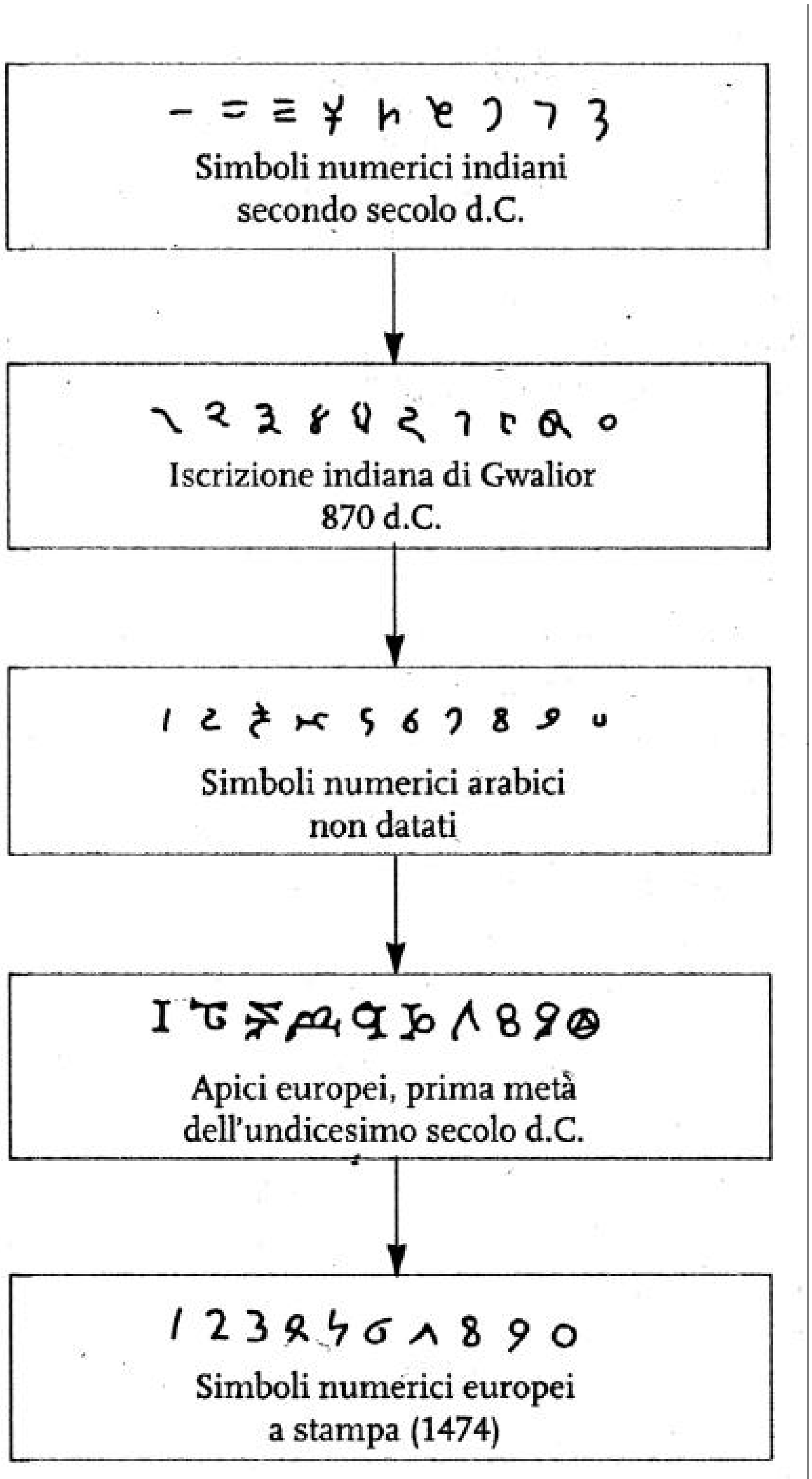


Fig. 3: *Forme primitive dei moderni numeri arabi*

I numeri arabi derivano, quindi, dai simboli indiani che iniziano a comparire nel II secolo d.C., ma non erano ancora organizzati in base ad un valore posizionale, e non era presente lo zero, la cui prima comparsa si ha nell'870 d.C..

Il merito degli arabi, invece, più che inventare questi simboli consiste nell'importarli tramite il commercio in Occidente, e questo spiega il loro nome. Il primo a descriverli dettagliatamente fu Fibonacci con il testo "liber abaci" che apparve nel 1202.

Probabilmente la nostra notazione posizionale non ebbe un unico inventore, né nacque in un solo luogo, ma diverse civiltà contribuirono alla formazione dei simboli numerici.

Le ricerche storiche hanno portato a dei risultati molto particolari e sorprendenti riguardo la civiltà dei Maya. Questi ebbero una cultura e una civiltà complesse, dal 100 a.C. al 1500 d.C. quando furono annientati dalla conquista spagnola.

Intorno al 500 a.C. svilupparono una scrittura geroglifica che non è stata ancora decifrata completamente, purtroppo, molti testi furono distrutti dai preti spagnoli; probabilmente i Maya avevano un sistema a base 20, derivante, presumibilmente, dal contare con le dita delle mani e dei piedi.

In ogni caso la storia del nostro sistema numerico è sicuramente straordinaria e ci permette di capire che l'uomo fin dalla sua origine possedeva un cervello matematico.

3.6 Le cifre arabe arrivano in Italia

Le cifre romane, come è stato detto precedentemente, comportavano non poche difficoltà. Nell'alto Medio Evo, al tempo di Carlo Magno, prima che fossero introdotte le cifre arabe erano ben pochi gli uomini in grado di saper contare, o meglio di poter utilizzare le buone capacità di calcolo proprie dell'uomo.

Il basso livello delle abilità aritmetiche è stato attribuito all'uso complesso dei numeri romani che rendevano i calcoli assai difficili; basti pensare una moltiplicazione come 325X47, quali difficoltà comporta con le cifre arabe CCCXXV per XLVII… era un'operazione così complessa riservata esclusivamente ai pochi colti.

Una salvezza per i nostri antenati fu l'abaco che aveva cambiato il lavoro lungo e monotono del calcolo numerico, proprio per questo sono molto pochi i documenti scritti pervenuti fino ad oggi. Commercianti, mercanti usavano senz'altro strumenti come abachi e tavolette per semplificare i loro calcoli.

In Italia si iniziava a parlare di nuove cifre, ma vi era una forte resistenza alla loro introduzione. Nonostante ciò fu proprio l'Italia, e soprattutto il grande centro mercantile di Venezia, ad introdurre le nuove cifre. A tutt'oggi non si ha una data precisa dell'arrivo di queste cifre in Italia, comunque fino al Rinascimento vi fu una forte resistenza.

Una particolare difficoltà dei numeri arabi è la conversione fra i vocaboli e i simboli numerici (transcodificazione).

3.7 E il bambino?… Il suo”viaggio” alla scoperta del simbolo scritto

E il bambino? Come arriva alla scrittura del numero? Numerosi studi hanno indagato questo campo d’indagine, si tratta di ricerche che affrontano il problema della notazione numerica del bambino in età pre-scolare.

Sul piano empirico i risultati arrivano ad una convergenza, anche se manca una convergenza da un punto di vista teorico. (Liverta Sempio, 1997)

Lo studio di Hughees è particolarmente significativo l’autore ha rilevato nei bambini dai 3 ai 5 anni la capacità di risolvere positivamente e creativamente i problemi di rappresentazione grafica, classificando quatto fasi, così distinte:

- Idiosincratica: costituita da notazioni non comprensibili per l’osservatore;
- Pittografica: che riproduce figurativamente gli oggetti della collezione;
- Iconica: formata da segni grafici (ad esempio aste) posti in corrispondenza biunivoca degli oggetti;
- Simbolica: la scrittura del simbolo usato convenzionalmente.

Le prime fasi sono maggiormente frequenti nei bambini più piccoli, mentre le ultime due sono più frequenti nei bambini di quattro-cinque anni, e sono inoltre di ordine più “astratto”.

Liverta Sempio (1997, p. 87) raccogliendo i vari contributi a riguardo e considerata la gamma delle forme grafiche usate dal bambino per rappresentare la quantità, considera tre classi:

- Pittorico/figurativo: costituito dal disegno degli oggetti;
- Segno/schematico: costituito da segni grafici che rappresentano la quantità degli oggetti;
- Convenzionale: il numerale.

Allo stesso modo B. D’Amore e F.Aglì (1995, p. 114) raccogliendo differenti contributi teorici e analizzando le prestazioni dei bambini in età prescolare e le strategie da essi utilizzate per rappresentare le quantità e scrivere i numeri distingue differenti fasi.

Analizzando le prestazioni dei bambini e le strategie da esse utilizzate per rappresentare le quantità e poi per scrivere i numeri si possono distinguere modalità e strategie diverse che così possono sintetizzarsi:

- Il disegno-scarabocchio: di difficile interpretazione, senza un'evidente corrispondenza con gli oggetti e le quantità considerate;
- In contorno o il disegno degli oggetti (rappresentazione pittorica): si riproduce tante volte l'immagine dell'oggetto quanti sono gli oggetti considerati;
- Segni-simboli (rappresentazione iconica) si riproduce tante volte un segno (tacche, croci, palline...) quanti sono gli oggetti considerati;
- Il disegno delle dita della mano che indicano la quantità considerata;
- Dei simboli numerici personali;
- I simboli numerici convenzionali: per indicare il cardinale si scrivono anche gli ordinali precedenti;
- Il segno convenzionale del numerale: la scrittura del numerale singolo.

In qualsiasi percorso formativo, soprattutto a scuola dell'infanzia se si vuole fondare l'apprendimento sulle esperienze e sulle competenze dei bambini, considerare le loro strategie nella scrittura dei numeri è un passaggio obbligato. L'aritmetica scritta richiede, infatti, l'uso di simboli e convenzioni che non sono di così facile acquisizione e presuppone un lungo processo di costruzione. (Aglì, D'Amore, 1995)

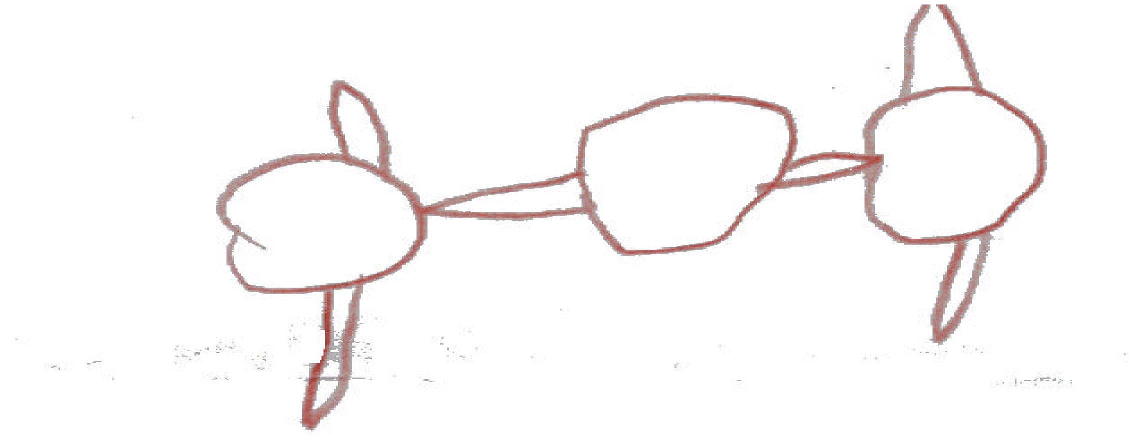
Durante l'esperienza di tirocinio, nel corso del quale si è svolta un' unità di apprendimento relativa ai numeri, si è voluto porre l'attenzione sulle "capacità spontanee" dei bambini di rappresentare graficamente il numero.

Sono state consegnate ai bambini due, tre o quattro caramelle ciascuno e si è chiesto di scrivere il numero di caramelle date loro.

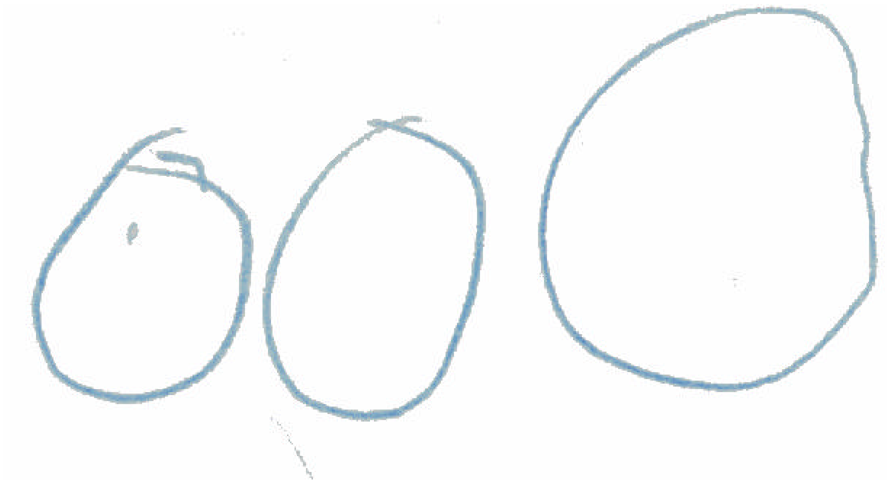
Le rappresentazione dei bambini sono state le più svariate, sono presenti le diversi fasi previste dagli studiosi.

Si riportano di seguito alcune di queste rappresentazioni che si ritengono significative, specificando anche l'età dei bambini.

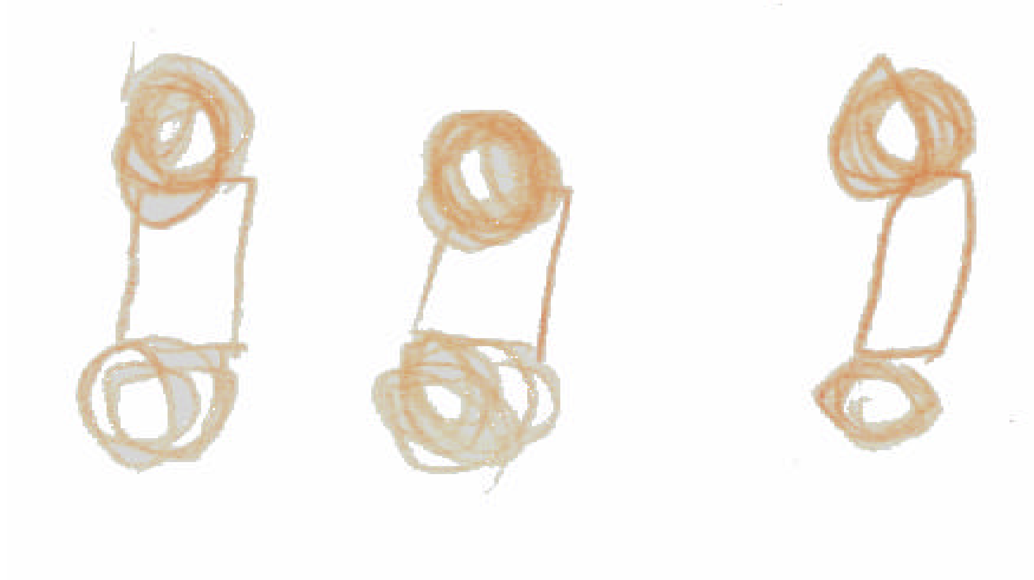
4 Anni e 3 mesi



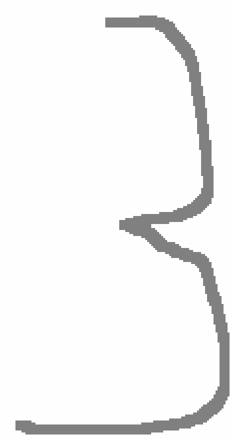
3 Anni e 9 mesi



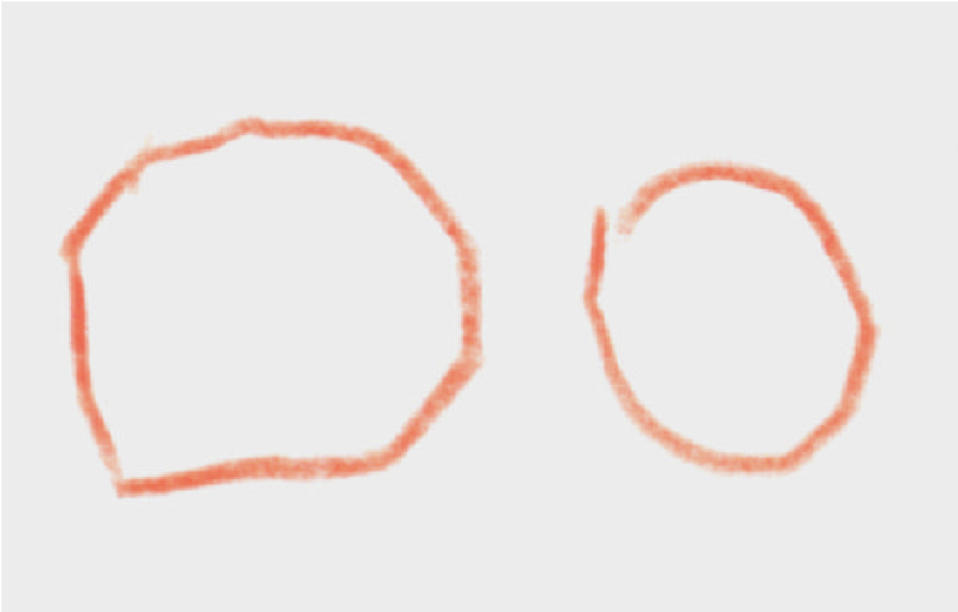
4 Anni e 9 mesi



4 Anni e 4 Mesi

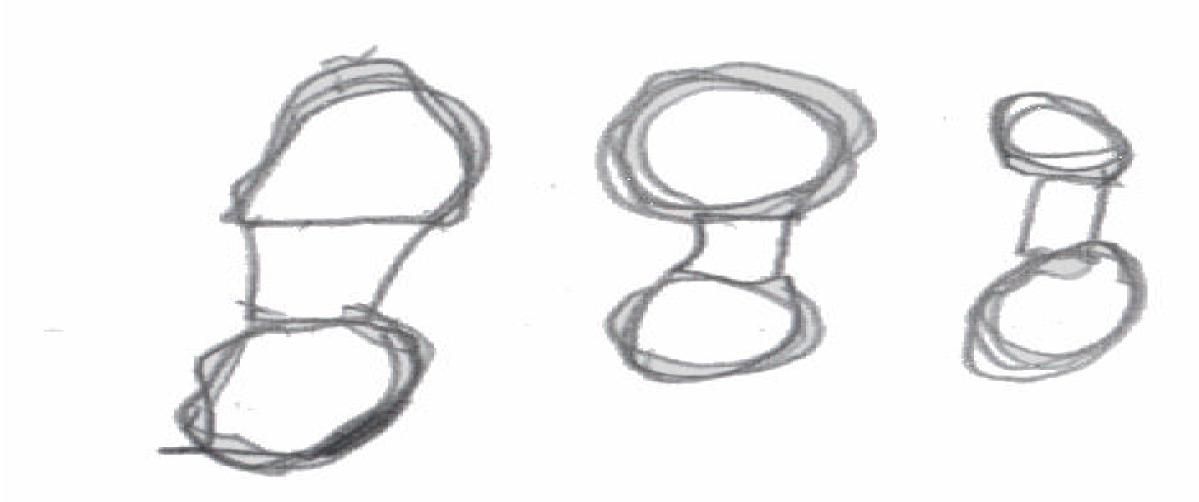


4 Anni e 7 Mesi

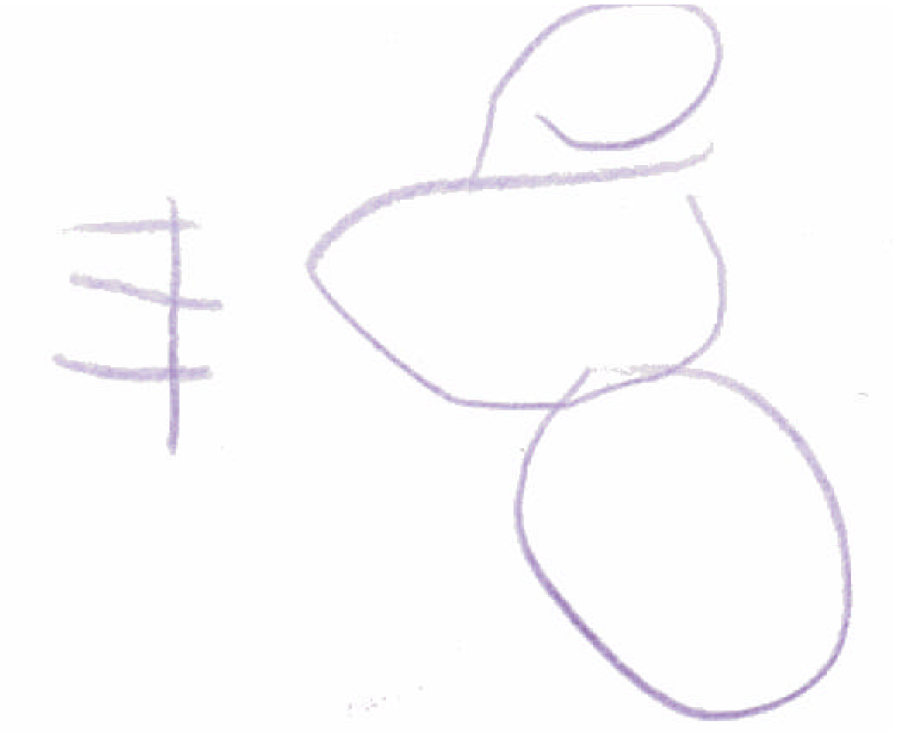


3 Anni e 10 mesi

4 Anni e 11 Mesi



4 anni e 3 Mesi



Cap. IV: Lingua e Numeri (Sperimentazione)

4.1 L'importanza della conta orale e il suo rapporto con la lingua

Il percorso fin qui delineato arriva ad un punto certamente da non sottovalutare nell'apprendimento della matematica: la conta orale e il rapporto con la lingua. Quest'aspetto, preso in considerazione da diversi studiosi, ha una relazione fondamentale con gli approcci dei numeri naturali in modo particolare con l'approccio ricorsivo. Va inoltre ricercato un legame con la storia del numero sia orale che scritta e quanto la notazione posizionale ha una relazione con l'acquisizione della conta orale.

Il ruolo della lingua nello sviluppo delle competenze matematiche merita un'attenzione particolareggiata; esiste, infatti, una relazione fra lingua e apprendimento delle parole-numero.

Quando ci si riferisce alla parola contare occorre porre una distinzione:

- Contare transitivo: riferito al contare una serie di elementi e indicare l'ultimo numero come il cardinale di quell'insieme; ad esempio i bambini contando una serie di cinque elementi ripetono la parola cinque due volte ed anche con intonazione diversa; proprio per dare un nome all'ultimo elemento conteggiato.
- Contare intransitivo: è il contare per il contare, recitare la filastrocca dei numeri, abilità connessa ad esperienze ripetute.

L'attività della conta deve essere presa in considerazione in questo duplice aspetto: contare azioni, oggetti (uso transitivo) e il contare per il contare (uso intransitivo). Entrambi gli aspetti promuovono esperienze fondamentali per l'acquisizione del numero; nello specifico in questo contesto viene soprattutto preso in considerazione questo secondo aspetto, l'acquisizione ordinata delle parole-numero, cioè la conta.

Il contare per il contare, cioè l'enunciazione orale dei numeri uno dopo l'altro in ordine senza riferimenti a oggetti o azioni, (la recita della filastrocca dei numeri) comporta per il bambino non solo l'esperienza della ricorsività (la ripetitività e il procedere ordinatamente) ma anche l'acquisizione delle leggi di produzione linguistica della sequenza verbale. Si tratta di un procedimento importante perché consente al bambino di procedere continuamente nella recita dei numeri e anche di sperimentare pian piano la sensazione dell'illimitatezza del procedimento. (Liverta Sempio, 1997)

La letteratura sulle ipotesi della conoscenza numerica appare particolarmente complessa e articolata. Preso in considerazione lo sviluppo delle abilità verbale di conteggio si presentano interessanti spunti e prospettive.

Per quanto riguarda l'acquisizione delle parole-numero si riscontrano in letteratura due distinti posizioni teoriche:

• La teoria dei principi di conteggio (Gellman, Gallistel, 1978): si fonda sul principio che i bambini piccoli detengono un concetto innato di numero, che evolve nelle acquisizioni delle procedure di calcolo. Le parole numero che i bambini apprendono dal linguaggio vengono sistemate sulla loro lista innata di "etichette numero mentale".

• La teoria dei contesti diversi (Fuson, 1991) conferma l'importanza delle competenze innate; tuttavia attribuisce pari valore alle competenze apprese, riconoscendo una costante interazione tra le due. L'autrice elabora una teoria dei contesti diversi secondo la quale i principi di conteggio, pur rispondendo a funzioni strutturali specifiche innate, gradualmente si sviluppano attraverso ripetuti esercizi e per ripetizione.

Entrambe le prospettive, in ogni modo, mettono in rilievo l'estremo valore che ha la conta nell'apprendimento della matematica. Anche Piaget (1941, p. 91) sostiene che: "la numerazione verbale non rappresenta alcuna parte del progresso stesso della corrispondenza e dell'equivalenza; nel momento in cui la corrispondenza diviene quantificante e dà così origine a degli inizi di equivalenza la numerazione parlata può accelerare il processo di evoluzione".

Già a livello dei primissimi apprendimenti della conta verbale deve essere preso in considerazione l'intreccio con il linguaggio. Lo sviluppo è sollecitato dall'ambiente, ricorrendo a diverse tecniche d'interazione come l'uso di una terminologia di base e la ripetizione.

Queste strategie che ricorrono negli usi spontanei dalle parole-numero da parte delle madri sono sia di facilitazione che di ostacolo per l'acquisizione della conta verbale.

Molto spesso le madri usano le parole-numero "uno, due, tre, quattro" in ordine corretto in misura maggiore di altri vocaboli della sequenza numerica; i bambini così vengono a contatto molto più spesso con la prima parte della numerazione verbale. La madre, però, incoraggiando il bambino a riprodurre la sequenza numerica, si avvale di strategie discorsive che possono creare difficoltà a riguardo. Sollecitano il figlio a contare pronunciando la prima parola-numero, rimanendo in silenzio aspettano che il bambino prosegua, questo si trova in difficoltà, non comprende se deve ripetere la stessa parola pronunciata dalla madre o se deve enunciare parole diverse e proseguire nella conta. (Liverta Sempio, 1997)

Se si considera sia la forma scritta che orale dei numeri entrambi pongono delle difficoltà; mentre, però, i numeri nella forma scritta vengono espressi per mezzo di un insieme di dieci simboli, nella forma parlata i numeri sono espressi mediante numerosi vocaboli.

Infatti, se è vero che i simboli utilizzati sono solo dieci le parole per esprimerli sono molto più numerose. Tutto previsto per i primi dieci anche se di per sé presentano qualche difficoltà linguistica; la parola – numero quattro è la più lunga della serie e anche la più difficile da pronunciare per i bambini di tre – cinque anni: le difficoltà linguistiche proseguono e sono notevoli per la serie dei “dici” (da undici a diciannove); i simboli non cambiano, restano invariati, ma le parole da utilizzare in italiano non hanno un immediato legame con queste.

Basti pensare all’immediata difficoltà per il numero undici, seppure questo ha un immediato riferimento alla parola uno (anche se non per intera) manca una corrispondenza con il simbolo numerico infatti 11 dovrebbe essere dieci uno. Ancora più complessa la situazione per il numero dodici la desinenza “do” si limita a richiamare come assonanza il due, ma non è di certo la stessa cosa. Il quattordici non è quattro – dieci, il quin non ha nessun legame – assonanza con il cinque, e così anche per il se – dici.

Dal diciassette si cambia “regola” e tutto torna a corrispondere alla norma, almeno fino al diciannove. A questo punto superate queste difficoltà, che non sono da ritenere assolutamente marginali, dovranno imparare ulteriormente i numeri delle decine; le difficoltà si riproporranno soltanto ogni dieci numeri perché basterà attaccare alla decina i numeri già conosciuti dal bambino da uno a nove; a questo punto sarà in grado di contare velocemente verso le centinaia e poi verso le migliaia e poi…verso l’infinito.

Tale difficoltà è stata rilevata sia da Butterworth, per la lingua Inglese che da Dehanee per il Francese; anzi, per quest’ultima lingua le difficoltà sono ancora maggiori perché tra le “decine” si nasconde perfidamente la “ventina” proposta dal “quatre vingt”, sopravvivenza linguistica di un sistema primordiale a base venti. Sia Butterworth che Dehaene rilevano come i Cinesi utilizzano al meglio il sistema decimale perché nella loro lingua rispettano sempre la notazione posizionale. Così l’undici corrisponde al dieci uno e così via, il venti è due dieci, il cento è dieci dieci. In tal modo i bambini Cinesi non devono imparare parole oltre le prime dieci. Inoltre, le parole –numero sono tutte monosillabiche. Questo sistema assicura un vantaggio dei bambini e dei ragazzi cinesi rispetto agli Europei e Americani in termini di velocità e precisione nei calcoli.

Può darsi, ci siamo chiesti a questo punto che i bambini italiani che a tre quattro anni non sanno “fare la conta” e quindi, concludiamo, “non sanno contare”, invece, non abbiano più semplicemente gli strumenti giusti per poter dimostrare di sapere fare di meglio. In effetti imparare delle parole con significato astratto, delle etichette da assegnare ad elementi un insieme, i quali hanno già un nome proprio potrebbe essere un’impresa nella quale i bambini riusciranno, ma probabilmente per le difficoltà linguistiche forse un po’ dopo anziché un po’ prima.

Quindi, il sistema orale è sicuramente uno dei sistemi che presenta più irregolarità, e le difficoltà maggiori riguardano i numeri da undici a venti; i vocaboli vengono organizzati con delle particolarità ed eccezioni.

Ancor di più queste difficoltà linguistiche si evidenziano nel momento in cui il bambino è portato allo scrivere i simboli numerici da 11 a 20, in cui questa difficoltà linguistica si scontra con una non corrispondenza con i simboli scritti.

Liverta Sempio, (1997, p. 165) analizzando il rapporto fra lingua e numeri, sostiene che apprendere la conta verbale da uno a venti nella lingua italiana significa:

1. imparare un insieme di vocaboli distinti e di altri che in parte riprendono i primi.

2. padroneggiare modelli differenti di ripresa dei primi vocaboli per formare gli altri:

- il vocabolo “dieci” diventa in alcune parole-numero “dici” in altre “dicia” ed è collocato in posti diversi nelle parole numero che lo riprendono: nella parte finale o nella parte iniziale.

Questo fenomeno viene definito l'inversione del principio di enunciazione dei valori;
- i vocaboli tre, sette, otto e nove sono ripresi nella loro interezza, mentre altri vengono completamente modificati (quattro = quattor-dici)
3. memorizzare l'ordine secondo cui pronunciare le parole numero. L'irregolarità della ripresa dei primi vocaboli peer formare gli altri non facilita il "transfer" dell'ordine dei primi dieci vocaboli ai secondi dieci.

SPERIMENTAZIONE

4.2 Individuazione del problema

Nel corso del lavoro si è sostenuto che la procedura del contare esige il possesso di più abilità:

- Conoscere i numeri dei naturali in ordine;
- Indicare – toccare ogni elemento una sola volta;
- Coordinare le due attività (vedi approcci al numero).

Inoltre, nel confronto fra culture è emerso che pur utilizzando il sistema decimale (i numeri arabi) a livello pressoché universale, nelle lingue Europee (e anche nell'Italiano) i bambini devono imparare oltre le parole-numero da uno a dieci anche le successive; dal venti possono riprendere parole già conosciute, per lo meno sino a ventinove; da questo punto la strada è più semplice perché, almeno sino a cento dovranno imparare solo i nomi delle decine.

Si tratta di un argomento interessante sulla base del quale si vuole dare un modesto contributo di ricerca.

4.3 Ipotesi

Si ipotizza che i bambini intorno ai quattro anni siano in grado di superare la prima decina; ma che incontrano difficoltà nel contare i numeri oltre il dieci, soprattutto i numeri da undici a venti.

4.4 Test

Il test consiste in un'intervista singola fatta a ciascun bambino a partire da domande stimolo da parte dell'intervistatore: "Sai contare? Fammi sentire i numeri" o simili.

4.5 Metodo

L'osservazione viene effettuata sul campo, infatti, è condotta in un contesto naturale familiare ai soggetti osservati (ambiente classe). L'osservatore non si limita ad osservare, ma provoca dei comportamenti, controlla e manipola alcune variabili (Olmetti Peja, 1998). Lo sperimentatore in questo caso non è percepito dai bambini come assolutamente estraneo infatti, il campione è la sezione in cui sono state svolte le attività di tirocinio.

È condotta inizialmente l'analisi a priori (previsione dei comportamenti dei bambini) sulla base di questa si costruiscono degli strumenti di osservazione per registrare la presenza/assenza dei comportamenti.

4.6 Campione

Per la sperimentazione è stata scelta una sezione della scuola dell'infanzia del II Circolo Didattico di San Cataldo. I bambini coinvolti sono di età compresa fra i tre anni e due mesi ei quattro anni e undici mesi. Il campione composto da venti bambini.

4.7 Analisi a priori

Sono stati individuati sei comportamenti relativamente alle risposte possibili dei bambini:

- **X1**: Nessuna risposta.
- **X2**: Non conta correttamente fino a 10.
- **X3**:Conta fino a 10 senza errori, compie errori da 11 a 20.
- **X4** : Conta senza errori sino a 20.
- **X5**: Conta senza errori sino a 30.
- **X6**: Altro.

4.8 Risultati attesi

Si ipotizza una maggiore frequenza della variabile X3.

4.9 Strumenti per la raccolta dei dati

Per la raccolta dei dati si utilizza una griglia dicotomica E' condotta inizialmente l'analisi a priori (previsione dei comportamenti dei bambini); sulla base dei comportamenti attesi e predefiniti si costruiranno degli strumenti di osservazione per registrare la presenza/assenza dei comportamenti.

Di per sé la lista può presentare dei limiti poiché consiste in un numero limitato di eventi da tenere sotto controllo, poiché sono stati scelti a priori, così sarà lasciato lo spazio ai comportamenti non previsti.

La lista di rilevazione può essere considerata un elenco dicotomico (presenza/assenza; sì/no). I dati non forniscono informazioni sull'interazione, o sulla qualità degli eventi (Olmetti Peja, 1998), inoltre, il "campo di osservazione" è molto limitato, riguarda esclusivamente la risposta allo stimolo.

I dati raccolti sono infine raccolti in una tabella in excel.

GRIGLIA DI OSSERVAZIONE

Data................................ Ora................................

Sezione.......................... Alunno..........................

- **X1**: Nessuna risposta. Sì No
- **X2**: Non conta correttamente fino a 10. Sì No
- **X3**:Conta fino a 10 senza errori, compie errori da 11 a 20. Sì No
- **X4** : Conta senza errori sino a 20. Sì No
- **X5**: Conta senza errori sino a 30. Sì No
- **X6**: Altro. Sì No

4.10 Strumenti per l'analisi dei dati

I dati sono raccolti in apposite tabelle, dalle quali si è calcolata la frequenza relativa e percentuale, i dati sono analizzati con il supporto del software excel.

4.11 Analisi dei dati

4.11.1 Raccolta dati e risultati generali

Si riporta qui di seguito un'analisi dei dati, sono presi in esame i dati grezzi, le frequenze relative e le frequenze percentuali.

Da una prima analisi globale dei dati emerge subito in modo significativo una maggiore frequenza assoluta della variabile X3 (conta senza errori da 1 a 10, compie errori da 11 a 20). È immediatamente da sottolineare che il comportamento X6 (altro) diviene: conta oltre il cento senza errori; questo è da considerarsi un dato assolutamente eccezionale che merita di essere evidenziato.

Il dato sicuramente significativo consiste soprattutto nell'evidente maggiore frequenza della variabile X3, nello specifico le sei variabili proposte hanno avuto le frequenze riportate nella pagina excel seguente, inoltre, si riporta la seguente tabella raccolta dati.

N. ordine	età	X1	X2	X3	X4	X5	X6
1	4 anni 02 mesi			*			
2	4 anni			*			
3	4 anni 03 mesi		*				
4	3 anni 11 mesi			*			
5	4 anni 11 mesi			*			
6	4 anni 09 mesi					*	
7	4 anni 03 mesi			*			
8	4 anni 05 mesi			*			
9	3 anni 04 mesi		*				
10	3 anni 02 mesi		*				
11	4 anni 07 mesi			*			
12	3 anni 10 mesi		*				
13	4 anni 03 mesi			*			
14	3 anni 02 mesi	*					
15	3 anni 09 mesi	*					
16	3 anni 09 mesi				*		
17	4 anni 02 mesi			*			
18	3 anni 02 mesi	*					
19	4 anni 04 mesi						*
20	3 anni 02 mesi	*					

Legenda:

X1: Nessuna risposta.

X2: non conta correttamente fino a 10.

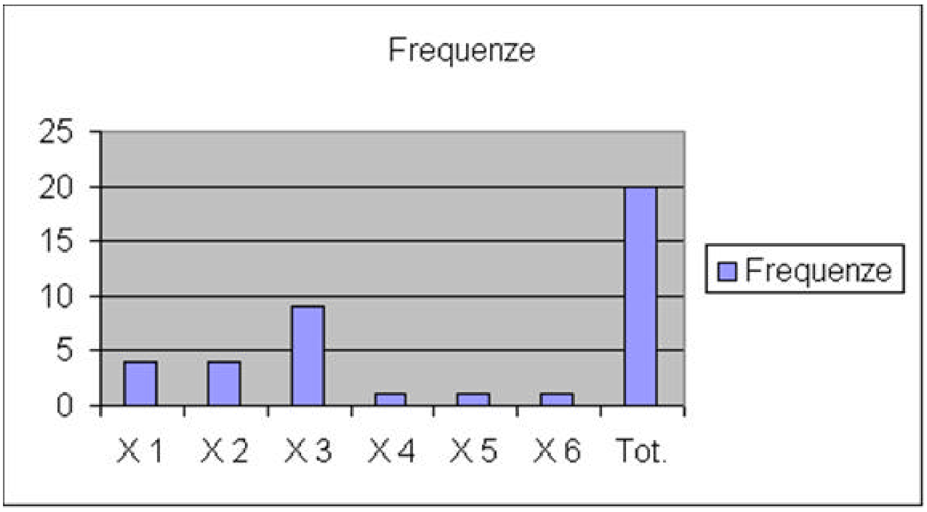
X3:Conta fino a 10 senza errori, compie errori da 11 a 20.

X4 : Conta senza errori sino a 20
X5: Conta sino a 30 senza errori.
X6: Altro (conta oltre il cento)

*****: comportamento manifestato

Tabella n° 1 - Risultati generali

Variabili	Frequenze	Fr. Relative	Fr. %
X 1	4	0,200	20
X 2	4	0,200	20
X 3	9	0,450	45
X 4	1	0,050	5
X 5	1	0,050	5
X 6	1	0,050	5
Tot.	20	1	100



X1: nessuna risposta.
X2: non conta correttamente fino a 10.
X3:conta fino a 10, compie errori da 11 a 20.
X4 : conta senza errori sino a 20
X5: conta sino a 30.
X6: altro (conta oltre il cento)

4.11.2 Gruppi d'età

Nel procedere con la analisi dei dati in un secondo momento si sono prese in considerazione le età dei bambini.

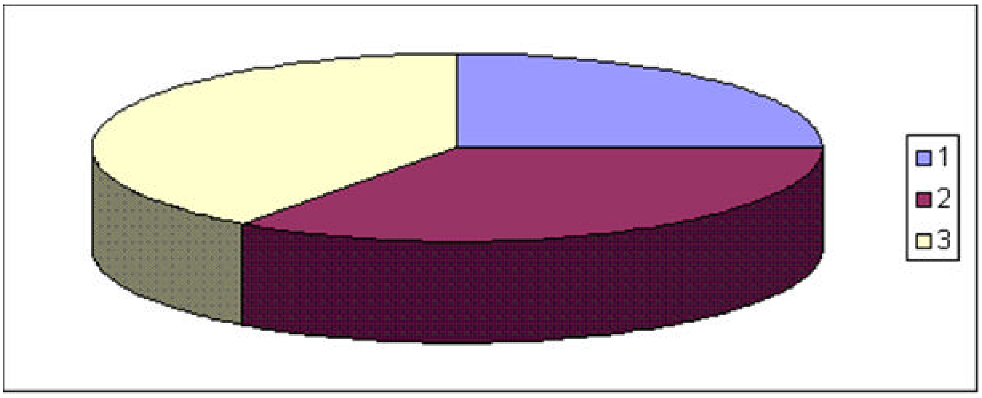
Il campione, composto da 20 bambini, considerata l'età è compreso fra un minimo di 3 anni e due mesi e un massimo di 4 anni e undici mesi, calcolata l'età media questa risulta essere esattamente di quattro anni. Dal punto di vista dell'età non si tratta però di un universo continuo poiché cinque bambini hanno un'età compresa tra i tre anni e due mesi e i tre anni e quattro mesi, ma non è compreso nessun bambino da tre anni e cinque mesi sino a tre anni e nove mesi. Prese in considerazione le età, il campione è stato distinto in tre gruppi:

- Dai tre anni e due mesi ai tre anni e quattro mesi
- Dai tre anni e nove mesi ai quattro anni e due mesi
- Dai quattro anni e tre mesi ai quattro anni e undici mesi.

Si riporta di seguito l'analisi dei dati distinti per gruppi di età, da cui emergono dati significativi (tabella età).

Tabella n° 2- Età

Età	Frequenze	Fr. Relative	Fr. %
Gr.1: 3a 2m / 3a 4m	5	0,250	25
Gr.2: 3a 9m / 4a 2m	7	0,350	35
Gr.3: 4a 3m / 4a 11m	8	0,400	40
Tot.	20	1	100



4.11.3 Analisi dei dati per gruppi d’età

Si rileva subito che le variabili X1 e X2 (non risponde e non è in grado di contare sino a 10) appartengono nella maggior parte ai bambini del primo gruppo, i più piccoli; considerati gli otto bambini che corrispondono alle prime due variabili ben sei hanno un età compresa fra i tre anni e due mesi ed i tre anni e quattro mesi; gli altri due appartengono al secondo ed al terzo gruppo d’età, nello specifico il bambino appartenente al secondo gruppo che non ha risposto non è di madre lingua italiana (tabelle per età).

Tabella n. 3
Risultati parziali (I gruppo 3 A. 2m./3A.4m)

Variabili	Frequenze	Fr. Relative	Fr. %
X 1	3	0,600	60
X 2	2	0,400	40
X 3	0	0,000	0
X 4	0	0,000	0
X 5	0	0,000	0
X 6	0	0,000	0
Tot.	5	1	100

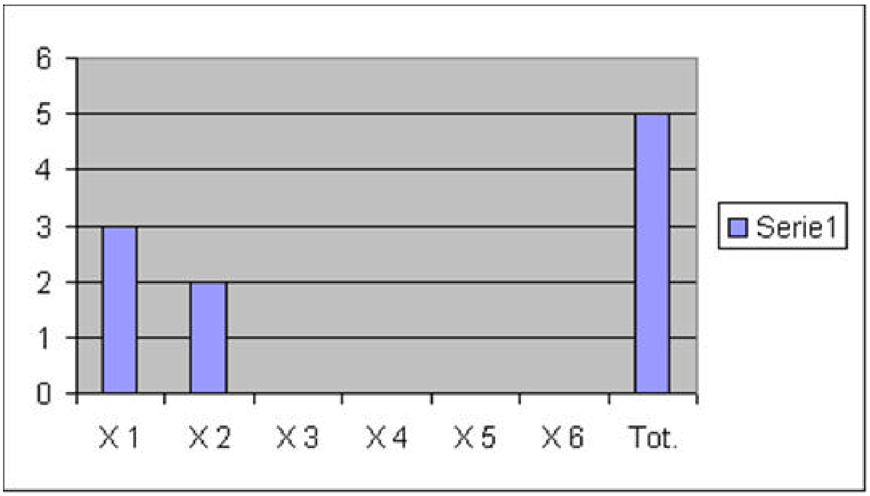


Tabella n. 4
Risultati parziali (II gruppo 3A.4m / 4°.2m.)

Variabili	Frequenze	Fr. Relative	Fr. %
X 1	1	0,143	14,29
X 2	1	0,143	14,29
X 3	4	0,571	57,143
X 4	1	0,143	14,29
X 5	0	0,000	0
X 6	0	0,000	0
Tot.	7	1	100

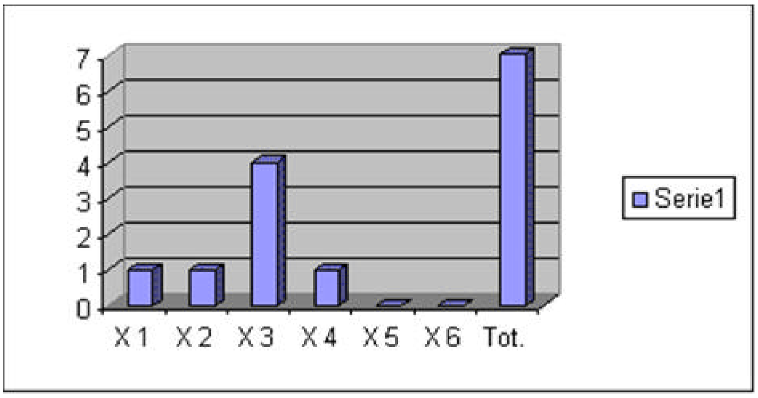
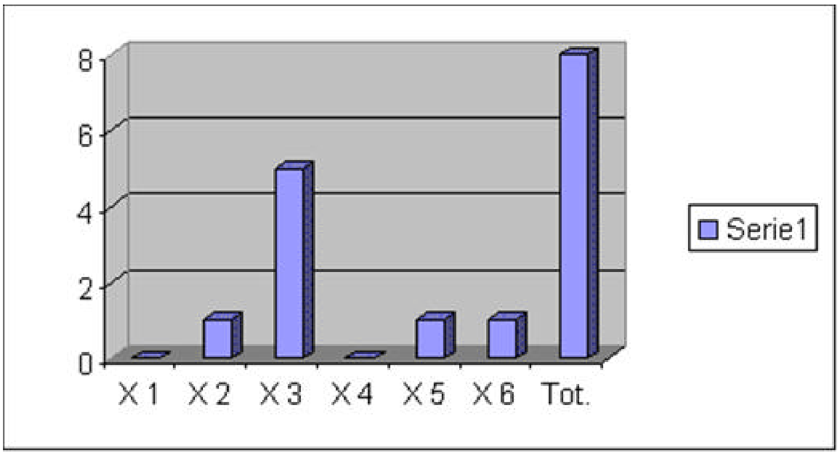


Tabella n. 5
Risultati parziali (III gruppo 4A.2m./4A.11m.)

Variabili	Frequenze	Fr. Relative	Fr. %
X 1	0	0,000	0
X 2	1	0,125	12,50
X 3	5	0,625	62,500
X 4	0	0,000	0
X 5	1	0,125	12,50
X 6	1	0,125	12,50
Tot.	8	1,000	100



4.11.4 Analisi dei dati II e III gruppo

Escludendo dal campione il primo gruppo con i bambini più piccoli, si è ristretta l'attenzione sugli altri due gruppi.

Messi a confronto in entrambi abbiamo un incidenza rilevante per la variabile X3; si presenta una frequenza di uno rispettivamente per le variabili X1, X4, X5, X6.

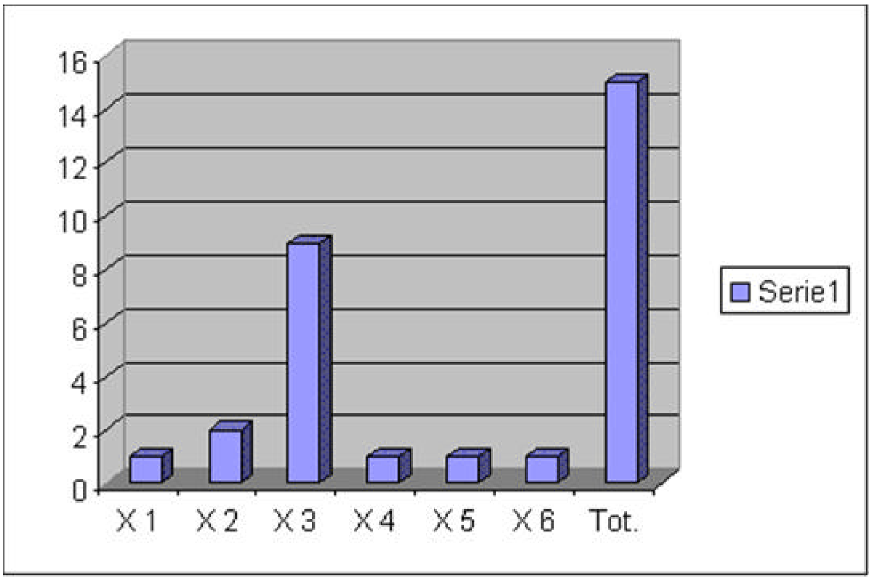
Confrontando il presente lavoro di ricerca anche con altre sperimentazioni (Lucangeli, 2003) emerge che i bambini appartenenti al campione possiedono buone capacità di conta orale, infatti, quasi tutti i bambini di quattro anni sono perfettamente in grado di contare con buona sicurezza da uno a dieci, emergono invece evidenti difficoltà per i numeri da 11 a 20, probabilmente per le difficoltà di origine linguistica.

I dati emersi risultano essere senz'altro significativi, ma sono da considerarsi assolutamente minimi e parziali, considerato soprattutto l'esiguo numero rappresentante il campione.

Tabella n. 6 Risultati parziali (II e III gruppo)

Variabili	**Frequenze**	**Fr. Relative**	**Fr. %**
X 1	1	0,067	7
X 2	2	0,133	13
X 3	9	0,6	60
X 4	1	0,067	7
X 5	1	0,067	7
X 6	1	0,067	7

Tot.	15	1	100



4.12 Osservazioni generali sulla sperimentazione

Come sempre un lavoro sperimentale, seppur semplice, riserva sempre straordinarie sorprese, soprattutto quando si tratta di bambini e tutta l'esperienza vale la pena di analizzarla, perché permette di creare spunti e riflessioni nuovi.

Innanzitutto è da evidenziare il contesto in cui è stata svolta l'esperienza; come è già stato detto nella sperimentazione è stata coinvolta una sezione di scuola dell'infanzia con bambini di età compresa fra 3 e 4 anni, in cui durante quest'anno accademico ho svolto le attività di tirocinio. Quindi per i bambini non sono stata una persona non conosciuta anzi, essendo stata già prima della sperimentazione alcuni giorni in sezione avevano instaurato un rapporto nei miei confronti.

Si è cercato, in ogni modo, di inserire i bambini in una situazione più "naturale" possibile, all'interno dell'ambiente scuola, per evitare, inoltre, un modificarsi dello stato "emotivo" dei bambini che avrebbe potuto alterare alcuni dati. Tutti i bambini hanno mostrato un atteggiamento di fiducia.

Ciascun bambino è stato intervistato singolarmente con una domanda stimolo da parte dell'intervistatore: "sai contare? Fammi sentire", oppure "mi fai sentire i numeri che conosci?" o simili.

È da ricordare che la conta è stata chiesta più volte (tre per ciascun bambino), con lo stimolo "ricomincia" o simili; si è creata una sorta di procedura di controllo per verificare se le prime risposte erano da ritenersi casuali o se in realtà erano trattenute così in memoria.

Nella gran parte dei casi i bambini hanno ripetuto tutte e tre volte la stessa stringa di numeri o molto simili fra di loro.

Elenchiamo alcuni comportamenti che meritano senz'altro di essere evidenziati:

- In tutti i bambini che nella conta sono andati oltre il dieci, sia in modo corretto o non corretto, si evidenzia un notevole stacco di voce e un cambiamento di velocità; anche questo permette di verificare che i bambini nella stringa dei numeri da undici a venti, anche se conosciuti nel giusto ordine, ne dimostrano sempre insicurezza.
- L'interlocutore ha avuto anche la funzione di stimolare le conoscenze dei bambini, infatti, nel momento di una pausa interagiva con i bambini con "e poi?" o "continua" o simili in alcuni casi ha significato una continuazione corretta in altri non corretta, e in altri ancora permaneva la pausa.
- Sono ancora da evidenziare alcune risposte un po' più particolari dei bambini o dei comportamenti significativi:

- Bambino n. 3 (4 anni e 3 mesi) alla domanda dell'interlocutore ha risposto con estrema sicurezza: "io i numeri li so tutti: 1 2 6 7 8 9 5."

- Bambino n. 9 (3 anni e 4 mesi) ha inteso la stringa di numeri da 1 a 3 con la parola via, ripetendo più volte così: "1 2 3 via".

- Bambino n.8 (4 anni e 5 mesi) ha così detto: “1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 dopo non li conosco più.”
- Bambino n. 16 (3 anni e 9 mesi) ha mostrato un comportamento assolutamente particolare anche se probabilmente può considerarsi episodico: il bambino ha ripetuto (uno dei pochi) correttamente i numeri da 1 a 20, allo stimolo dell’interlocutore “e poi?” con molta astuzia e inventiva ha riutilizzato le parole già conosciute, probabilmente non conoscendo la parola trenta. Infatti dopo il ventinove ha riutilizzato le parole da dieci a diciannove accanto la parola venti; è venuta fuori una particolarissima stringa dei numeri: “uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove, dieci, undici, dodici, tredici, quattordici, quindici, sedici, diciassette, diciotto, diciannove, venti, ventidieci, ventiundici, ventidodici, ventitredici, ventiquattordici, ventiquindici, ventisedici, ventidiciassette, ventidiciotto, ventidiciannove”.
- Bambino n. 19:rientra nella categoria altro ed è in grado di contare oltre il 100 con estrema sicurezza senza errori; ealla fine della conta orale mi ha chiesto: “se vuoi te li dico anche in inglese!!!

4.13 Lingua e numeri: analisi di due casi

4.13.1 H.X. una studente cinese in Italia

Diversi studiosi sottolineano il vantaggio nei calcoli dei bambini e ragazzi Asiatici. In questo contesto di ricerca si vuole appunto citare il caso di una studentessa cinese in Italia.

H.X. è una ragazza cinese di diciotto anni e frequenta il IV anno di un istituto secondario superiore.

H.X. è arrivata in Italia all’età di dodici anni ed ha frequentato fin dal primo anno le scuole medie. È stata agevolata nell’apprendimento della lingua dalla presenza nel territorio di parenti che erano arrivati in Italia cinque anni prima.

H.X. è stata promossa dal terzo al quarto anno di superiore con una media di oltre otto.

Sin dal primo anno delle medie in matematica ha avuto come voto distinto (nonostante le difficoltà iniziali con la lingua italiana); nelle superiori ha avuto sempre in queste materie nove e dieci.

Riesce brillantemente, inoltre, in tutte le materie che comportano formalizzazione e calcoli.

Alle radici del suo straordinario successo scolastico contribuiscono sicuramente svariati fattori, tra i quali non da sottostimare la maggiore motivazione nello studio rispetto ai suoi coetanei e una capacità di concentrazione incredibile. A questo proposito, i suoi compagni mi hanno riferito che in una di quelle giornate pre-carnevalesche, mentre tutti vivevano un'atmosfera festosa, H.X. era intenta a svolgere i compiti.

In questo contesto, è però da valutare l'aspetto linguistico della matematica orientale. H.X. nei calcoli è la più veloce dei suoi coetanei (almeno dei suoi compagni di classe), riesce mentalmente ad estrarre radici intere con numeri alti e a svolgere potenze.

Ha confermato la numerazione cinese che è stata descritta in questo contesto di ricerca; i calcoli continua a svolgerli mentalmente nella sua lingua e poi li traduce in italiano. H.X. ha anche raccontato le sue tabelline: recita per intero solo quella del nove, in quella dell'otto manca quella del nove, in quella del sette mancano quella dell'otto e del nove, e così via... ha, insomma, dimezzato la fatica: questo è il metodo generale utilizzato nel suo paese d'origine.

Da lei abbiamo saputo di altri suoi connazionali frequentanti lo stesso istituto, tre maschi e una femmina, in difficoltà perché da poco tempo in Italia non conoscono bene la lingua; però in matematica hanno buoni risultati, riuscendo a capire le lezioni solo vedendole alla lavagna.

Si potrebbe pensare a proposito di H.X. e dei suoi connazionali di eccezioni che però tendono a confermare una regola. La lingua se conforme ai simboli sembra facilitare l'apprendimento.

4.13.2 Il caso di C.: tra difficoltà linguistiche e simbolo scritto

Nel presente lavoro di ricerca si è ritenuto interessante fare anche un breve accenno al rapporto fra lingua e numeri, soprattutto in relazione ai simboli scritti.

Questo fenomeno viene, in questo contesto, raccontato con gli occhi di C.

C. è un bambino di otto anni con un lieve ritardo negli apprendimenti. dopo aver un bel po' di tempo "giocato" con i numeri da 1 a 10, svolgendo anche addizioni e sottrazioni, si è iniziato a proporre l'acquisizione dei numeri da 11 a 20. Si evidenziano immediatamente enormi difficoltà a cominciare dal pronunciare correttamente tutte le parole– numero e ancor di più nel riconoscere nei simboli scritti proprio le parole–numero.

Sicuramente i fattori che hanno portato C. ad incontrare queste difficoltà sono molteplici, ma in questo contesto si vuole senz'altro sottolineare l'influenza che ha la lingua sull'apprendimento dei numeri.

Seppure C. sembra aver ben capito che il simbolo 10 rappresenta una quantità formata da 10 elementi, sembra guardare con aria stupita e perplessa quel numero 12 che con grande difficoltà riesce ad accostare alla parola–numero "dodici". Sembra dire: <<dopo aver visto 1 e 2 accostati, compreso che il primo numero a sinistra è 10, al massimo posso iniziare a capire che è un "dieci–due" ma non dodici!>>

Questo è solo un semplice esempio in cui ho potuto constatare personalmente queste difficoltà linguistiche che porta in sé la nostra cara e meravigliosa lingua italiana, soprattutto con i numeri.

C. intanto non riesce ancora a pronunciare con fluidità i numeri da undici a venti, probabilmente appena sarà in grado di farlo supererà anche le difficoltà linguistiche legate al rapporto tra parola–numero e simbolo. Intanto guarda ancora perplesso quei numeri fra undici e venti, di cui riconosce singolarmente i simboli, ma che nascondono dietro queste insidie non riuscendo a trovare le giuste associazioni così strane con le parole-numero.

Cap. V: Osservazioni conclusive

5.1 Problemi Aperti

Possiamo ritenere ragionevolmente che i bambini di tre - quattro anni, in genere, sanno percepire le piccole numerosità e fare confronti tra maggiore e minore; è possibile sappiano compiere operazioni più-meno, sempre nell'ambito di piccole numerosità. Ciò è dimostrato da vari studi ed è stato l'oggetto di indagine della mia tesi di Laurea nell'indirizzo Scuola elementare, dedicata, con termine Piagetiano, alla Conservazione della quantità. A quell'età non si può, ritengo, dimostrare l'esistenza di capacità di "counting" perché ne manca il presupposto: quello linguistico.

La sperimentazione che si è condotta ha avuto per contenuto la misurazione non della capacità di conteggio ma della capacità di "conta", cioè della capacità dei bambini di enunciare ordinatamente le parole-numero sino a quanto fossero capaci; il campione è stato costituito da bambini tutti al di sotto dei cinque anni, a partire dai tre.

Il risultato atteso, è ritenuto molto probabile, se non ovvio, era che tutti o quasi, anche i più piccoli, conoscessero le parole-numero nel giusto ordine da 1 a 10 e che poi continuassero con difficoltà. Si ritiene che tali difficoltà non dipendano da incapacità di calcolo che possono esistere ma non sono oggetto di valutazione ma siano collegate meramente a difficoltà linguistiche, di apprendimento di parole, che hanno la caratteristica dell'astrattezza, non sono il nome di un oggetto. Anche per gli adulti, nonostante l'assodata capacità di conta, ricordare un numero "lungo" può presentare rilevanti difficoltà. Il numero si "deposita" nella memoria a breve e se l'informazione non viene utilizzata in pochi secondi svanisce dalla mente. Per rafforzare la memoria dei numeri ricorriamo sovente ad associazioni di idee che assumano un significato. Ad esempio la sequenza dei numeri corrispondenti alle date di nascita delle persone più vicine, o collegate ad eventi particolari o almeno per i numeri da 1 a 90 si può ricorrere alla smorfia: ciascuno ha ovviamente tecniche diverse di conservazione della memoria che dipendono dall'esperienza personale.

Un bambino ha scarse possibilità di associazione; in compenso ha elevate capacità di apprendimento che, data la scarsa corrispondenza tra la lingua dei numeri e la notazione arabica, sono messe a dura prova. A conclusione del lavoro di ricerca e del breve lavoro sperimentale ci si chiede se premettendo a ciascun numero da 11 a 19 la parola dieci si otterrebbero migliori risultati. I bambini potrebbero imparare facilmente la sequenza dicendo dieciuno, decidue e così via; il 20 potrebbe essere duedieci: esattamente come la lingua cinese.

In tal caso ci si potrebbe aspettare che tutti i bambini che conoscano la sequenza parole 1 – 10 possano proseguire speditamente. Naturalmente si tratta di un'ipotesi semplificatrice alla quale non si potrebbe attribuire alcun significato relativo alla reale comprensione del numero; rimane però il dubbio che la "lingua dei numeri" intralci non solo la scorrevolezza nella conta ma anche, in seguito, la precoce comprensione della notazione posizionale. Naturalmente, il presunto beneficio che ne deriverebbe si scontra con la più che millenaria storia del linguaggio poiché la numerazione linguistica, abbiamo visto è prelevata pari pari dal latino.

Questo resta nel presente lavoro un problema aperto che suscita quanto meno nuovi interrogativi sul come raccordare lingua e simboli.

5.2 Conclusioni

La parola utilizzata per introdurre questa parte finale ha, ovviamente, un valore di assoluta provvisorietà. Nel corso della trattazione sono stati affrontati tutta una serie di argomenti che lasciano più problemi aperti rispetto a quelli che riescono a risolvere.

Le principali domande che ho iniziato a pormi sono state: individuare gli orientamenti nelle strategie didattiche più utili a potenziare i processi cognitivi specifici che sono alla base della conoscenza numerica del calcolo; ma anche cercare di capire perché fra gli allievi è diffuso uno scarso rendimento in matematica, accompagnato da un vero e proprio atteggiamento di fobia.

I due aspetti risultano probabilmente essere correlati. Proprio seguendo questa traccia non sempre esplicita, si è partiti dall'analisi delle posizioni teoriche più rilevanti, da Piaget (il precursore) agli studi di Gellman, Gallistel, Fuson, passando poi agli studi più recenti di Dehaene e Butterworth; per poi incontrare anche alcuni autori italiani che offrono ricchissimo materiale di uso immediatamente didattico e un riassetto organizzativo del numero naturale sotto i vari approcci (D'Amore, Spagnolo,Cutrera...). Ho avuto modo di rilevare una letteratura sull'argomento abbastanza vasta, ma dominata dalla presenza di studi stranieri. Com'era forse ovvio, il campo d'indagine si è rivelato fin troppo ampio. Pur riportando le posizioni teoriche più recenti, con i doverosi riferimenti al precursore Piaget, in questa ricerca il mio interesse si è concentrato anche sulla "storia del numero". Mi sono, pertanto, chiesta se almeno una delle difficoltà relative all'apprendimento della matematica è collegata all'aspetto linguistico. Chiaramente, saper enunciare correttamente la sequenza numerica non è indice della "capacità di contare" ma ne è senz'altro un prerequisito.

In questo lavoro di ricerca è stata anche "misurata" la capacità di conta come enunciazione di bambini intorno ai quattro anni, considerato il campione di un numero esiguo (venti), non si possono sicuramente avere dei dati assoluti; ma relativamente a questo contesto di ricerca si è verificato che intorno ai quattro anni riescono a recitare la sequenza uno -dieci; dall'undici in poi ogni parola è nuova e difficile da ricordare. Praticamente tutti i bambini intervistati non continuano correttamente la sequenza, ad eccezione di tre bambini.

La ricerca fin qui inoltrata anche con la semplice sperimentazione è risultata assolutamente affascinante ed ha aperto questa nuova strada e prospettiva nel mio cammino di ricerca secondo la quale l’aspetto linguistico e culturale ha un ruolo fondamentale nell’acquisizione e nella piena padronanza del sistema decimale.

A conclusione del presente lavoro di ricerca si è aperta innanzi a me una strada nuova e ricca, proprio riferita all’apprendimento del numero nel bambino.

I nuovi studi, le nuove prospettive epistomelogiche portano sul piano della ricerca pedagogica e didattica indubbi vantaggi. Oggi si ha un’immagine delle competenze del numero del bambino in età prescolare, molto più articolata di quanto l’approccio piagetiano abbia permesso, seppure ne costituisce ancora tutt’oggi la base teorica.

Il farsi strada di queste nuove prospettive di studio più vicine anche a differenti punti di vista – culturali, della neuroscienza, linguistici, storici – sta portando alla luce una visione intensa e complessa dell’attività numerica del bambino fra i tre e i cinque anni.

Dal mio punto di vista, anche d’insegnante, queste nuove prospettive mi mettono sicuramente in discussione; ma qual è l’atteggiamento razionale – pedagogico che un educatore deve assumere su questa strada?

L’insegnante-educatore deve mettersi senz’altro in discussione e deve essere in grado di attuare la ricerca in didattica. In questo senso l’insegnante-ricercatore studia i fenomeni d’insegnamento nel sistema sapere-allievo-insegnante.

L’insegnante-ricercatore mette a punto la sua “indagine” individuando e scegliendo accuratamente le variabili didattiche, le ipotesi di ricerca, gli strumenti didattici e gli strumenti diagnostici.

L’accettazione del paradigma della ricerca in didattica è anche riconducibile al paradigma della ricerca scientifica, nel senso che i risultati possono essere riprodotti e generalizzati; la riproducibilità è garantita da uno studio approfondito dell’analisi a priori, dal punto di vista epistemologico, storico – epistemologico sia quello dei comportamenti attesi (Spagnolo, 1998).

Con il presente lavoro di ricerca non si ha la pretesa di fornire un grande contributo nella ricerca in didattica, in ogni modo è stato possibile riflettere e approfondire gli aspetti teorici più rilevanti e ad impostare un metodo di ricerca.

Insegnamento vuole dire anche questo: sapere integrare e fare intergire entrambi gli aspetti: le prospettive teoriche da una parte e la ricerca dall'altra.

BIBLIOGRAFIA

- Barbanera A. (2002), *Ragiono e gioco*. Firenze, Giunti Gruppo Editoriale.

- Bartolini Bussi M. (a cura di) (2000), *Numeri: Conoscenze e Competenze.* Azzano San Paolo, Edizioni Junior.

- Bever T. – Mehler J., *Cognitive Capacity of very young children,* in "Science", 158, 1967, pp.141 – 142.

- Butterworth B., (1999), *The mathematical brain.* Trad. It. *Intelligenza matematica.* Milano, Rizzoli. 1999

- Caldelli M. L. – D'Amore B. (1986) *La Matematica dalla scuola dell'infanzia alla scuola elementare.* Scandicci (Fi), La Nuova Italia Editrice.

- Cannizzaro -.Crocini L - Mazzoli P., (2000), *Numeri: conoscenze e competenze.* Azzano san Paolo (BG), Edizioni junior.

- Cinquetti P. (1977), *L'educazione dell'intelligenza.* Milano, Fabbri Editori.

- Cocuzza S.- Lino S. (2002), *I pre-requisiti per l'apprendimento della matematica.* Tirrenia, Del Cerro.

- Cutrera M. – Lo Verde D. (1999), *Aritmetica Manuale di didattica.* Palermo, Sigma Edizioni.

- D'Amore B. – Aglì F. (1995), *L'educazione matematica nella scuola dell'infanzia.* Milano, Juvenilia.

- D'amore B.(2002), *Basta con le cianfrusaglie,* in "La Vita Scolastica", 8, p.14.

- D'amore B.(2002), *L'uso critico degli strumenti,* in "La Vita Scolastica", 16, p.15.

- Dehaene S., (1997), *La bosse des maths.* Trad. It. *Il pallino della matematica.* Milano, Mondadori.1997.

- Dienes (1966), *Mathematics in Primary Education.* Hamburg, Institute for Education. Trad. It..*La matematica nella scuola elementare.* .Firenze, La Nuova Italia Editrice, 1977.

- Donaldson M. (1979), *Come ragionano i bambini*. Milano, Emme. Tit. orig. *Children's Mind's*. 1978.

- Enzensberger H. M (1997)., *Der Zahlenteufel.* Trad. It. *Il mago dei numeri*. Torino, Einaudi.

- Fraire M. – Rizzi A., (1993), *Elementi di Statistica.* Roma, La Nuova Italia.

- Franchi G.,(1987), *La Matematica nella scuola elementare.* Brescia, La Scuola.

- Gray P., (1998), *Psicologia.* Bologna, Zanichelli.

- Liverta Sempio O., (1997) *Il bambino e la costruzione del numero.* Roma, La Nuova Italia Scientifica.

- Lucangeli D. – Poli S. – Molin A. (2003), *L'intelligenza numerica.* Tento Ed. Erickson

- Marrazzani I. (2004), *Numeri e operazioni.* Roma, Carrocci Editore.

- Miceli S. S. (2002), *La conservazione della quantità nell'insegnamento/apprendimento della matematica(età 5-6 anni).* Tesi di Laurea: Università degli studi di Palermo, Facoltà Scienze della Formazione, c.d.l. Scienze della Formazione Primaria. Relatori della tesi: Proff.: Filippo Spagnolo e Romano Carlo.

- Miller P., (1993), *Teorie dello sviluppo psicologico.* Bologna, Il

Mulino. Tit. orig. *Theories of Developmental Psychology*. New York Freeman and Company, 1983.

- Neri S. – Tinelli D. (1991), *Guida Fabbri per gli insegnanti delle scuole materne.* Milano, Gruppo Editorial Fabbri.

- Olmetti Peja D. (1998), *Teorie e tecniche dell'osservazione in classe.* Firenze, Giunti.

- Pepi A. – Maltese A. ,(2000), *Memoria e competenze scolastiche.* Milano, Edizioni Unicopli .

- Piaget J. – Szeminska A.(1941), *La genèse du nombre chez l'enfant.* Neuchâtel, Delachaux et Niestlé, .Trad. It. *La genesi del numero nel bambino.* Firenze, La Nuova Italia,1968

- Piaget J., (1964), *Six études de Psychologie.* Paris, édition Gonthier. Trad. It. *Lo sviluppo mentale del bambino.* Torino, Einaudi Editore, 2000.

- Piaget J., (1945), *La Formation du symbole chez l'enfant.* Neuchâtel, Delachaux et Niestlé. Trad. It. *La formazione del simbolo nel bambino.* Firenze, La Nuova Italia Editrice, 1972.

- Piaget J. – Boscher B. – Chatelet A. (1950), *Initiation au calcul.* Paris, Edition Bourrelier. Trad. It. *Avviamento al calcolo.* Firenze, La nuova Italia,1956.

- Presutti-Corsi (1985) *"Fare e pensare, esperienze programmate di attività educative e didattiche per i bambini da 3 a 6 anni".* Modena, Centro programmazione editoriale.

- Scurati C., (1985), *Nuovi programmi per una scuola nuova.* Brescia, La Scuola.

- Spagnolo F., (1998), *Insegnare le matematiche nella scuola secondaria.* Firenze, La Nuova Italia Scientifica.

- Spagnolo F. – Camarda S. – Magro M. T.,(1982), *Il concetto di numero.* Firenze, Giunti Marzocco.

- Varisco M. (1979), *L'educazione logico-matematica nella scuola dell'infanzia.* Milano, Fabbri Editori.

- Zaniello G. (a cura di), (1997), *La prepedagogicità della sperimentazione,* Palermo, Palumbo.

RIFERIMENTI NORMATIVI

- 1991, *Orientamenti dell'attività educativa nelle scuole materne statali*. (D. M. 3/6/1991)
- *Indicazioni nazionali per i piani personalizzati delle attività educative nelle scuole dell'infanzia.* (2002)
- *Raccomandazioni nazionali per l'attuazione delle Indicazioni nazionali per i piani personalizzati delle attività educative nelle scuole dell'infanzia.* (2002)

SITI CONSULTATI

- www.istruzione.it
- www.macchinematematiche.unimo.it
- http://math.unipa.it/~grim/