Algoritmi e Strutture Dati (Mod. B)

Algoritmi su grafi
Ricerca in profondità
(Depth-First Search) Parte III

Applicazioni di DFS

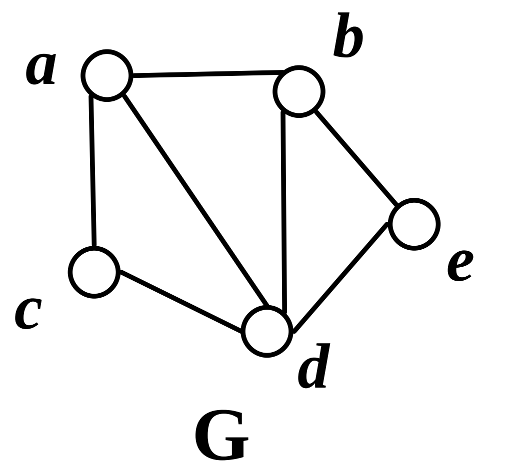
***Due problemi*:**

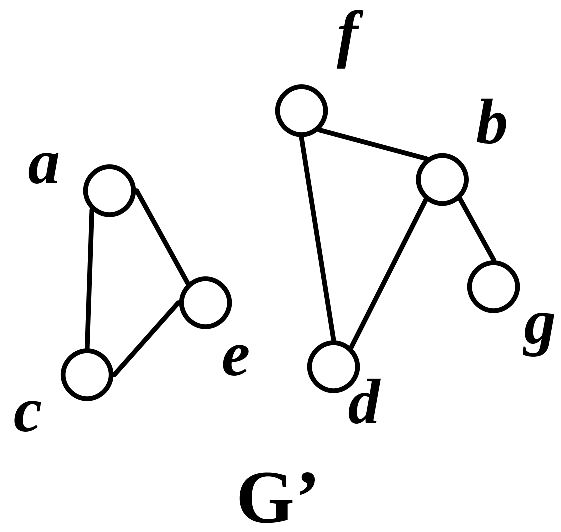
- ✓ **calcolare l'*ordinamento topologico* indotto da un *grafo aciclico*.**
- ➢ **calcolare le *componenti (fortemente) connesse* (*CFC*) di un *grafo (non) orientato*.**

Vedremo che entrambi i problemi possono essere risolti *impiegando* opportunamente l'*algoritmo* di *DFS*

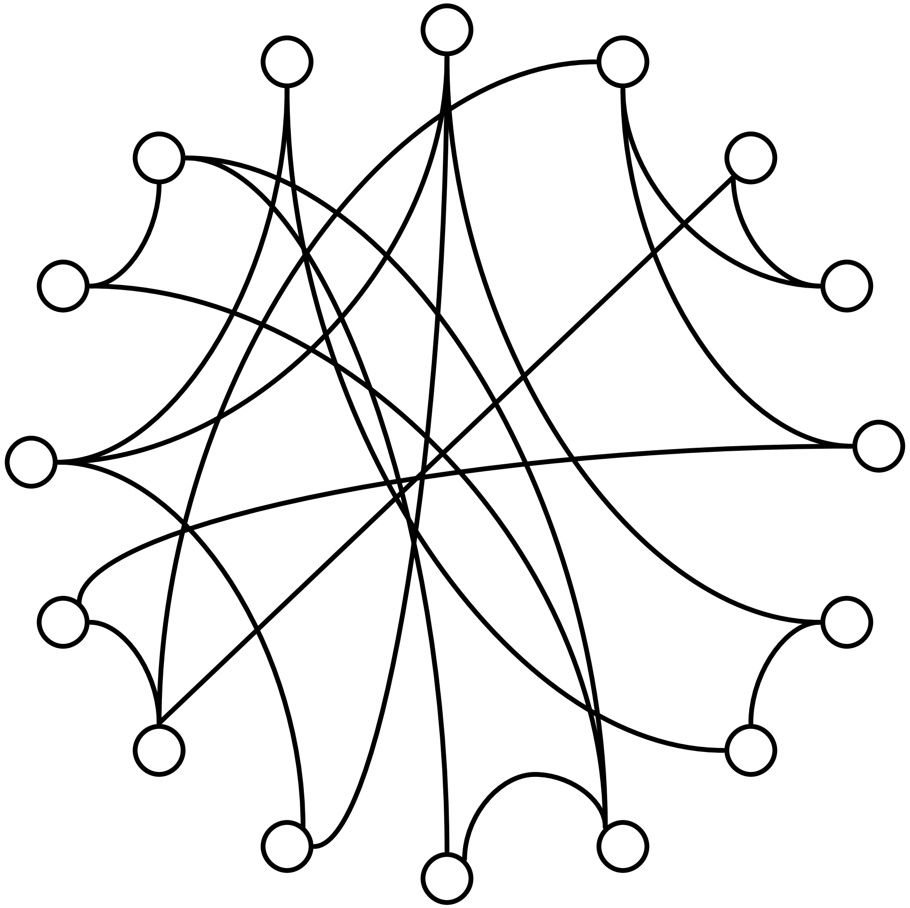
Connettività

- **Un vertice *u* si dice *connesso* ad un vertice *v* in un grafo *G* se esiste un percorso da *u* a *v* in *G*.**
- **Un grafo (non) orientato *G* si dice *(fortemente) connesso* se ogni coppia di vertici sono *connessi*.**
- **Altrimenti, *G* è *sconnesso*.**

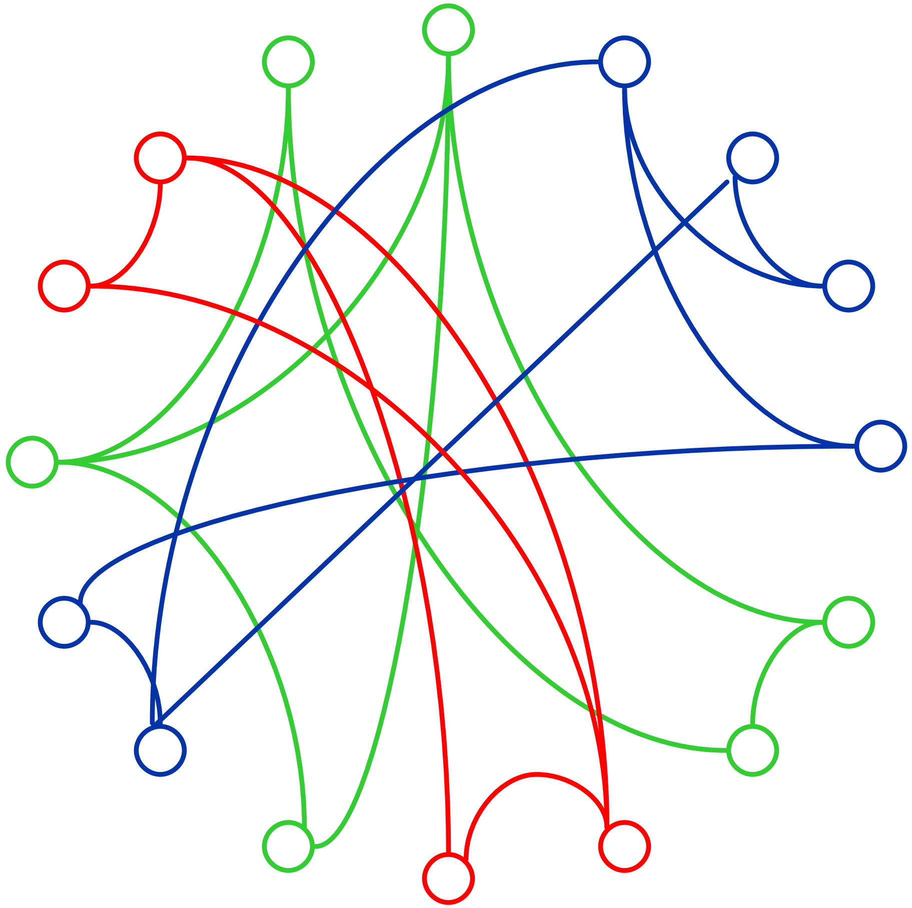




Verifica della connettività



Verifica della connettività



Verifica della connettività

Per verificare se un *grafo non orientato* è *connesso* possiamo:

- **usare l'algoritmo *DFS***
- **il grafo è connesso *se e solo se* una chiamata di *DFS* raggiungerà tutti i vertici.**

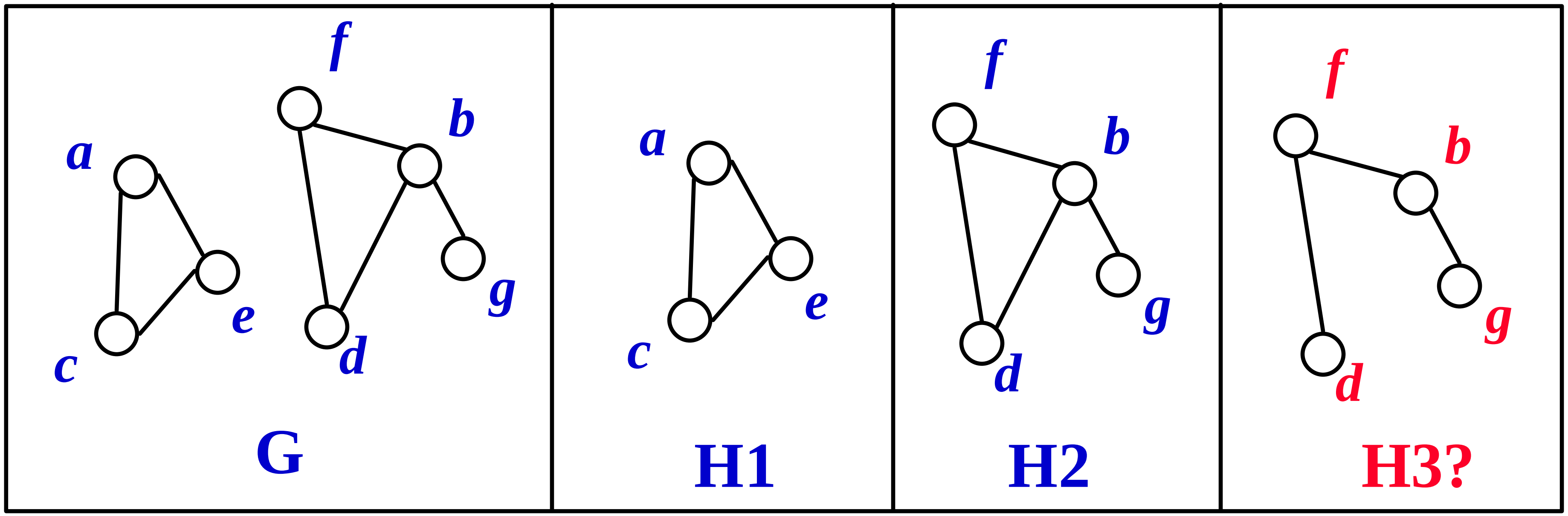
- **In effetti una chiamata di *DFS-Visita* raggiungerà tutti i vertici contenuti *esattamente* in una *componente connessa*. *Perché?***

- **Se c'è *più* di un vertice *u* con *pred*[*u*] = `NIL` il grafo *non può* essere *connesso*.**

Componenti connesse

Un *<u>sottografo massimale connesso</u>* di un *grafo non orientato G* si dice *componente connessa* di *G*.

- **Un *sottografo connesso H di G* è "massimale" se**
  - **non si possono aggiungere ad *H* altri vertici o archi**
  - **in modo che l'*H'* risultante sia ancora un sottografo connesso di *G*.**



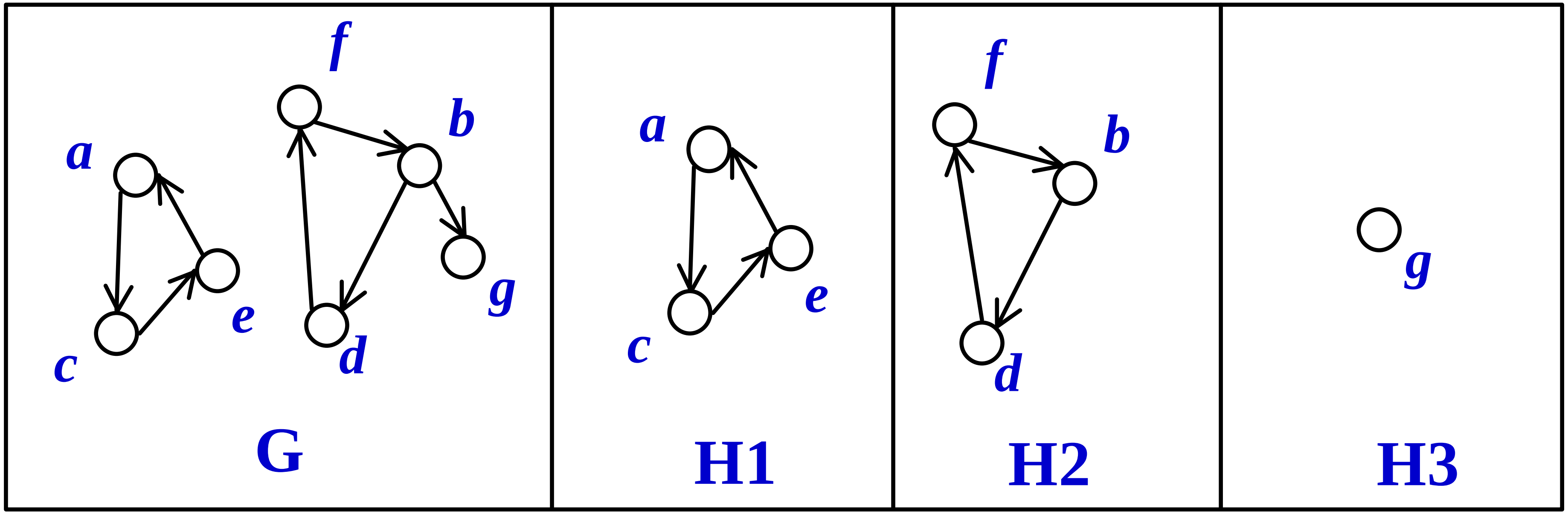
Esercizio

Es. 23.3.9: **Mostrare che *DFS* su un *grafo non orientato G* può essere usata per identificare le Componenti Connesse e che la *foresta DF* contiene tanti *alberi* quante *CC*. Modificare *DFS* in modo che ogni vertice sia etichettato con $cc[v]$ tra 1 e k (k numero di *CC*) in modo che $cc[u]=cc[v]$ se e solo se u e v se appartengono alla stessa *CC*.**

Componenti fortemente connesse

Un *sottografo massimale fortemente connesso* di un *grafo orientato G* si dice *componente fortemente connessa (CFC)*.

- **Un *sottografo fortemente connesso H di G* è massimale se**
  - **non si possono aggiungere ad *H* altri vertici o archi**
  - **in modo che l'*H'* risultante sia ancora un sottografo fortemente connesso di *G*.**



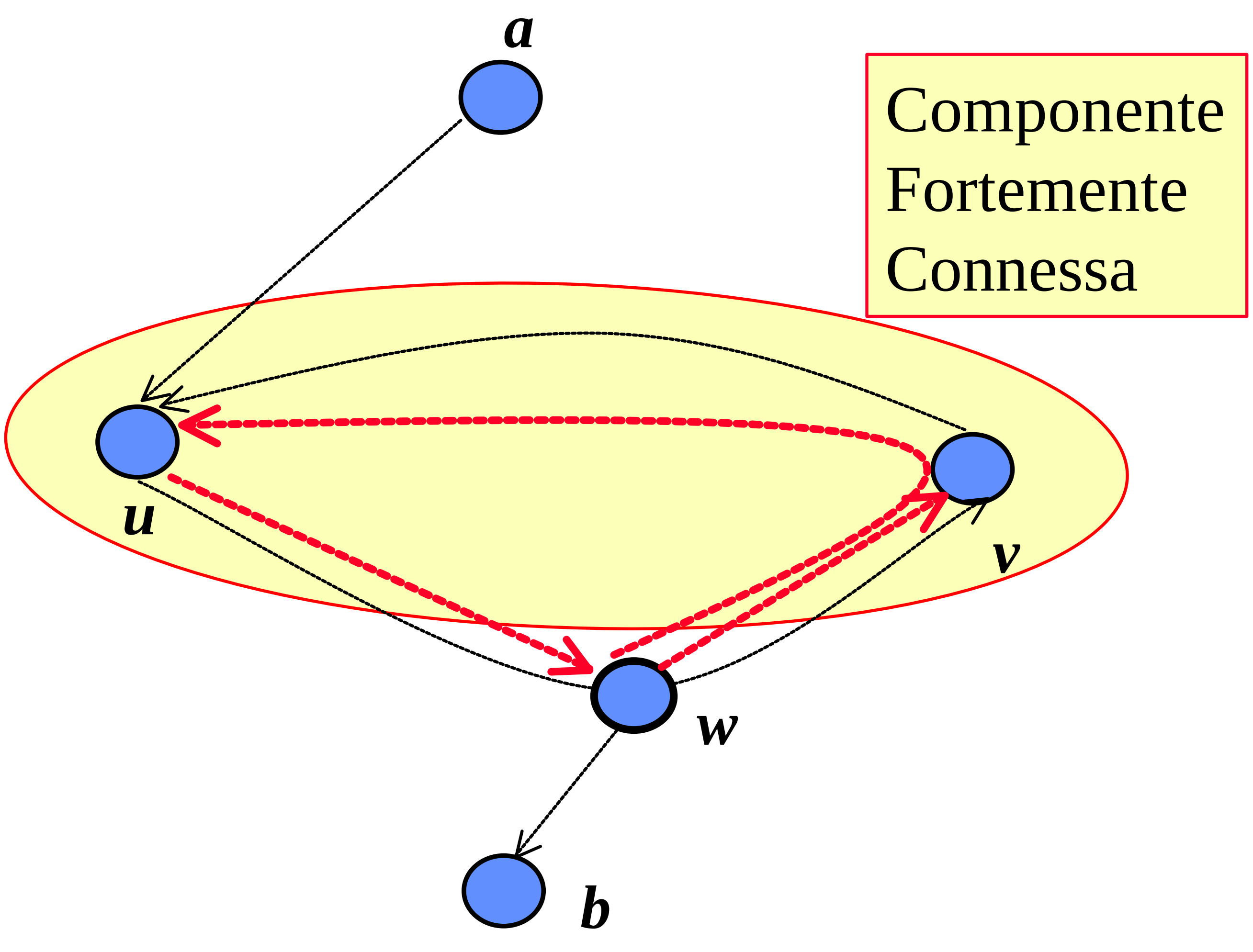
Proprietà delle CFC

Teorema 1: **Se due vertici compaiono nella stessa *componente fortemente connessa*, allora *nessun percorso* tra i due vertici *esce* da quella *componente*.**

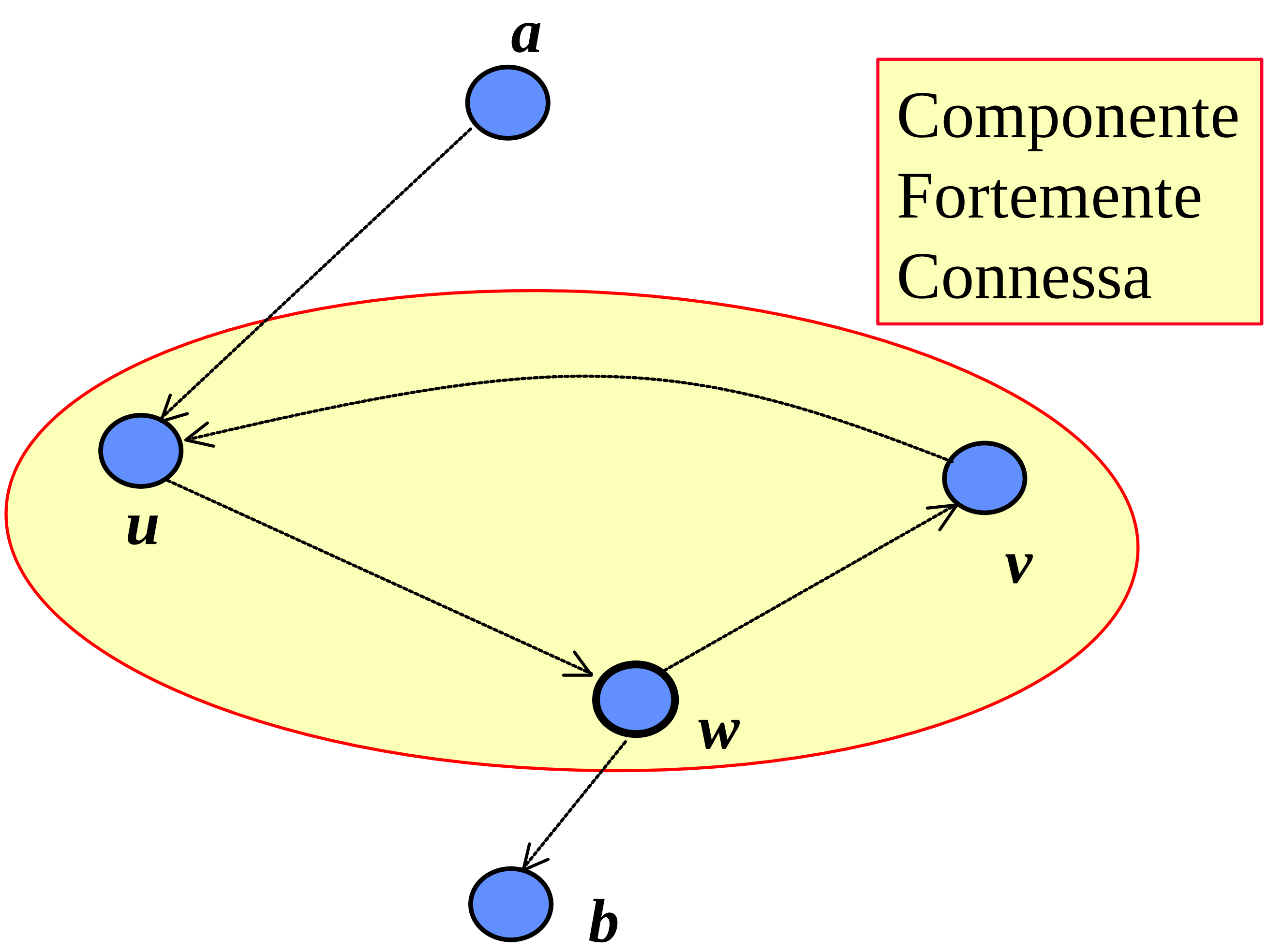
Dimostrazione: **Siano *u* e *v* due vertici nella stessa componente fortemente connessa.**

- **Esistono percorsi sia da *v* a *u* che da *u* a *v*. Sia *w* un vertice lungo qualche percorso *u*®*w*® *v*.**
- **Poiché c'è un percorso *v*®*u*, *u* è raggiungibile da *w* tramite *w*®*v*®*u*. Quindi *w* e *u* sono nella stessa componente fortemente connessa.**
- **Poiché *w* è stato scelto arbitrario, il teorema segue.**

Proprietà delle CFC



Proprietà delle CFC



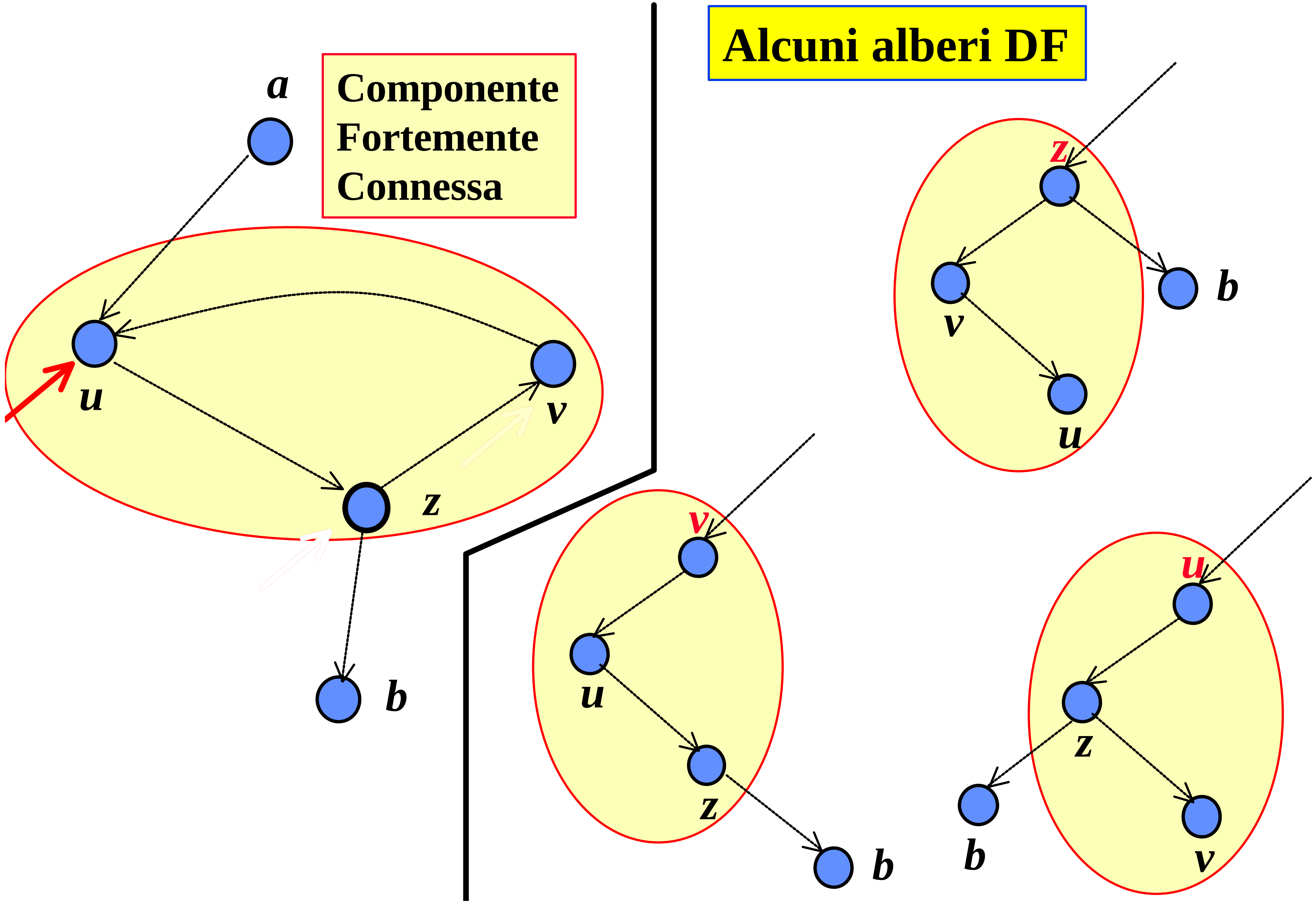
Proprietà delle CFC

Teorema 2: **In ogni DFS, tutti i vertici nella *stessa componente fortemente connessa* compaiono nello *stesso albero DF*.**

Dimostrazione: **Sia *r* il primo vertice di una componente fortemente connessa (*CFC*), visitato da *DFS*.**

- **Poiché è il primo, tutti gli altri vertici nella *CFC* devono essere ancora bianchi.**
- **Esiste quindi un percorso da *r* a tutti gli altri vertici nella *CFC*… (*perché?*)…**
- **…infatti questi percorsi non escono mai dalla *CFC* di *r* (*teorema precedente*), i vertici di tutti percorsi nella *CFC* sono bianchi.**
- **Quindi per il *teorema del percorso bianco*, ogni vertice nella *CFC* sarà un discendente di *r* nell'*albero DF*.**

Proprietà delle CFC



Proprietà delle CFC

Definizione: **Dato un vertice *u* di un grafo *G*, l'*avo di u*, in simboli $\varphi(u)$, è il vertice *w* raggiungibile da *u* che viene terminato per ultimo in una *DFS* del grafo *G*, cioè:**

$\varphi(u) = w$ **tale che** $\boxed{u \xrightarrow[p]{} w}$ **e** $f[w]$ ***è massimo***

- **Notate che è possibile che sia $\varphi(u) = u$, perché *u* è raggiungibile da se stesso e quindi vale anche**

$$f[u] \leq f[\varphi(u)]$$

- **Inoltre si può dimostrare che $\varphi(\varphi(u)) = \varphi(u)$**

Proprietà delle CFC

Si può dimostrare che f(f(*u*)) = f(*u*)

- ***u* —*p*® *v* implica che *f*[f(*v*)] £ *f*[f(*u*)]**
- **infatti l'insieme {*w*: *v* —*p*® *w*} Í {*w*: *u* —*p*® *w* }, e il tempo di terminazione (*f*[]) dell'*avo* è il *massimo* tra tutti i vertici raggiungibili.**

- **ma poiché *u* —*p*® f(*u*) allora *f*[f(f(*u*))] £ *f*[f(*u*)]**
- **e per quello che abbiamo visto nel lucido precedente vale anche *f*[f(*u*)] £ *f*[f(f(*u*))]**
- **quindi risulta che *f*[f(*u*)] = *f*[f(f(*u*))]**
- **ma allora f(f(*u*)) = f(*u*), perché due vertici con lo stesso tempo di terminazione in *DFS* non possono che essere lo stesso vertice.**

Proprietà delle CFC

Teorema 3: **In un grafo orientato *G*, l'*avo* f*(u)* di un qualsiasi vertice *u* è un *antenato* di *u* nell'*albero DF* di *G*.**

Dimostrazione: **Se f*(u)* = *u* il teorema è banalmente vero.**

- **Se f*(u)* ¹ *u*, poiché *u* —*p*® f*(u)*, consideriamo il colore del vertice f*(u)* al tempo *d*[*u*]:**
  - **se f*(u)* è nero, allora *f*[f*(u)*] < *f*[*u*], *contraddicendo* il fatto che deve essere *f*[*u*] £ *f*[f*(u)*], per definizione.**
  - **se f*(u)* è grigio, allora f*(u)* è un *antenato* di *u*.**

Dimostriamo ora che f*(u)* *non può essere bianco*

Proprietà delle CFC

Teorema 3: **In un grafo orientato *G*, il *avo* f*(u)* di un qualsiasi vertice *u* in un *albero DF* di *G* è un *antenato* di *u*.**

***Dimostrazione:* f*(u)* non può essere bianco**

***Due casi* (ricordate che *u* —p® f*(u)*):**

1. **Ogni vertice intermedio tra *u* e f*(u)* è bianco**
2. **Qualche vertice intermedio tra *u* e f*(u)* non è bianco**

Proprietà delle CFC

Teorema 3: **In un grafo orientato *G*, il *avo* f*(u)* di un qualsiasi vertice *u* in un *albero DF* di *G* è un *antenato* di *u*.**

Dimostrazione: f***(u) non è bianco***

1. **Ogni vertice intermedio tra *u* e f*(u)* è bianco**

   allora f***(u) sarà un discendente di u per il teorema del percorso bianco*.**

   Questo significa però anche che *f*[f*(u)*]< *f*[*u*], e ciò *contraddice* la definizione di f***(u)*.**

Proprietà delle CFC

Teorema 3: **In un grafo orientato *G*, il *avo* φ*(u)* di un qualsiasi vertice *u* in un *albero DF* di *G* è un *antenato* di *u*.**

Dimostrazione: φ***(u)* non è bianco**

2. **Qualche vertice intermedio tra *u* e** φ***(u)* non è bianco**

sia *t* l'ultimo vertice non bianco nel percorso tra *u* e φ***(u)*.**

Allora *t* deve essere grigio (non ci sono archi da vertici neri a vertici bianchi) e il successore di *t* è bianco.

Ma allora c'è un percorso bianco tra *t* e φ***(u)* al tempo *d*[*u*] (quindi anche al tempo *d*[*t*] (*perché*?)),** φ***(u)* è allora un discendente di *t* (*teorema del percorso bianco*).**

Quindi *f*[*t*]>*f* [φ***(u)*], <u>*contraddicendo*</u> la scelta di** φ***(u)*.**

Proprietà delle CFC

Teorema 4: **Durante una *DFS* di un grafo orientato *G*, i vertici *u* e f*(u)*, per ogni *u*, appartengono alla stessa *CFC*.**

Dimostrazione: **Per definizione di avo, abbiamo che *u* —*p*® f*(u)*.**

Ma poiché f*(u)* è un antenato di *u* nella *foresta DF* (*teorema precedente)*, sappiamo anche che vale f*(u)* —*p*® *u*.

In conclusione, entrambi i vertici, essendo mutuamente raggiungibili, *devono* stare nella *stessa CFC*.

Proprietà delle CFC

Teorema 5: **In un grafo orientato *G*, due vertici *u* e *v*, compaiono nella stessa *CFC* *se e solo se* hanno lo *stesso avo* nella *DFS* di *G*.**

Dimostrazione:

- ***solo se*: Assumiamo *u* e *v* siano nella stessa *CFC*.**
  - **Ogni vertice raggiungibile da *u* è anche raggiungibile da *v* e vice versa.**
  - **Dalla definizione di *avo* segue che $\varphi(u)=\varphi(v)$**

    infatti, $u \overset{p}{\rightsquigarrow} v$ implica che $f[\varphi(u)] \geq f[\varphi(v)]$

    mentre $v \overset{p}{\rightsquigarrow} u$ implica che $f[\varphi(v)] \geq f[\varphi(u)]$.

Quindi $f[\varphi(v)] = f[\varphi(u)]$.

Proprietà delle CFC

Teorema 5: **In un grafo orientato *G*, due vertici *u* e *v*, compaiono nella stessa CFC *se e solo se* hanno lo stesso *avo* nella DFS di *G*.**

Dimostrazione:

- ***se*: Assumiamo ora $\phi(u) = \phi(v)$.**
  - **Per il *teorema 4*, *u* compare nella stessa *CFC* di $\phi(u)$, e *v* compare nella stessa *CFC* di $\phi(v)$**
  - **quindi, ovviamente *u* e *v* compaiono nella stessa *CFC*.**

Calcolo delle CFC

Sappiamo quindi che:

- **Le *CFC* sono insiemi di vertici con lo *stesso avo*.**
- **Durante *DFS*, l'*avo* $\phi(u)$ di un vertice *u* è sia il *primo vertice scoperto* (visitato) che l'*ultimo vertice terminato* (processato) nella *CFC* di *u* (dal *teorema del percorso bianco* e dal *teorema 5*)**
- **L'*ultimo vertice terminato r* è certamente un *avo*. Infatti è l'*avo* di se stesso e nessun altro vertice nell'albero ha *tempo di terminazione* maggiore.**

Calcolo delle CFC

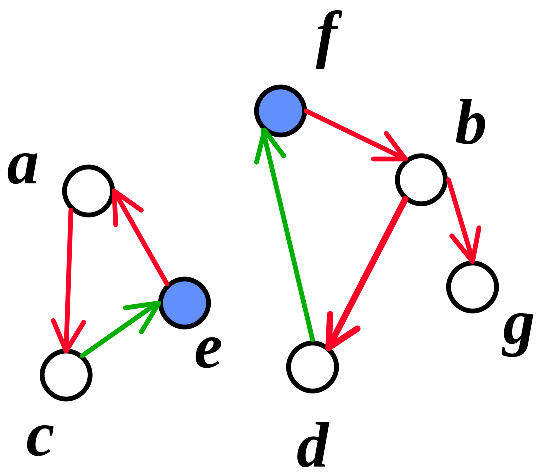
- **L'*ultimo vertice terminato r* è certamente un'*avo*. Infatti è il suo stesso *avo* e nessun altro vertice nell'albero ha *tempo di terminazione* maggiore.**
- **Quali sono i vertici della *CFC* di *r*?**
- ***Risposta*: tutti quelli che hanno *r* come *avo***

  cioè quelli che possono raggiungere *r* ma che non possono raggiungere alcun altro vertice con tempo di terminazione maggiore di *r*.
- **Se *r* è il vertice con il *massimo valore di f[r]*, allora ci basta cercare i vertici che lo possono raggiungere (tra quelli che *r* stesso raggiunge).**

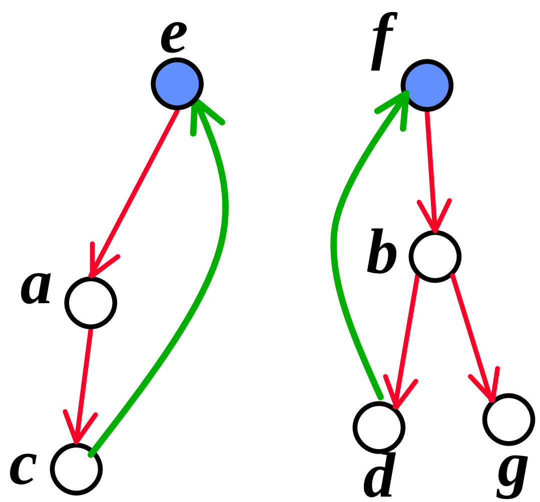
Calcolo delle CFC

- **Se *r* è il vertice con il *massimo valore* di *f[r]*, allora ci basta cercare i vertici che lo possono raggiungere (tra quelli che *r* stesso raggiunge).**
- **Ma, dalla definizione di grafo trasposto G^T di *G*, questi vertici sono proprio i *vertici raggiungibili* da *r* nel *grafo trasposto* G^T.**
- **La stessa cosa può essere ripetuta con tutti i vertici del grafo non raggiunti al passo precedente scegliendo i vertici in *ordine decrescente di tempo di terminazione* (prima quelli terminati più tardi).**

Calcolo delle CFC

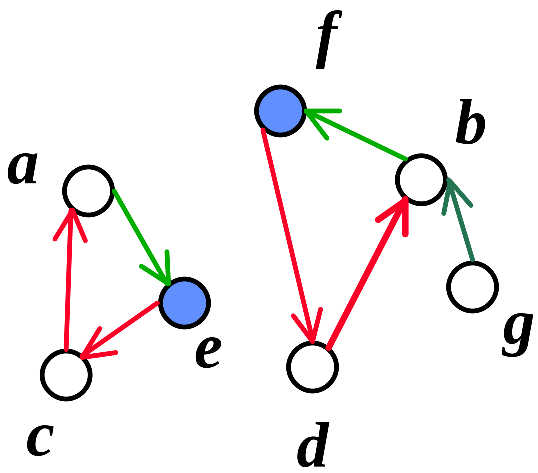


G

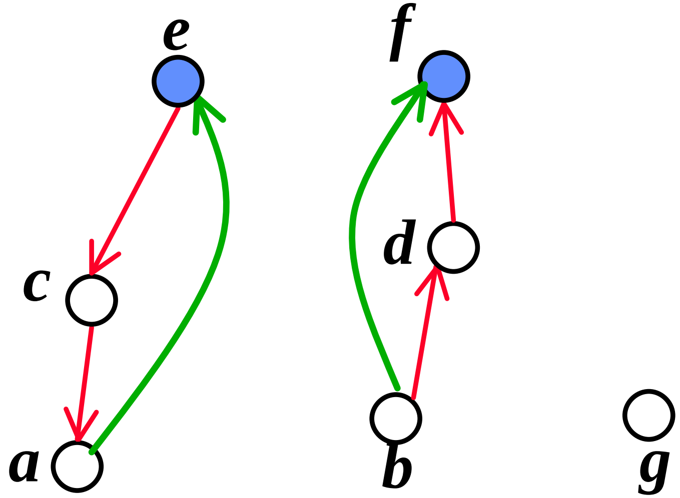


$f[e] > f[a] > f[c] \quad > \quad f[f] > f[b] > f[g] > f[d]$

Calcolo delle CFC



G^T



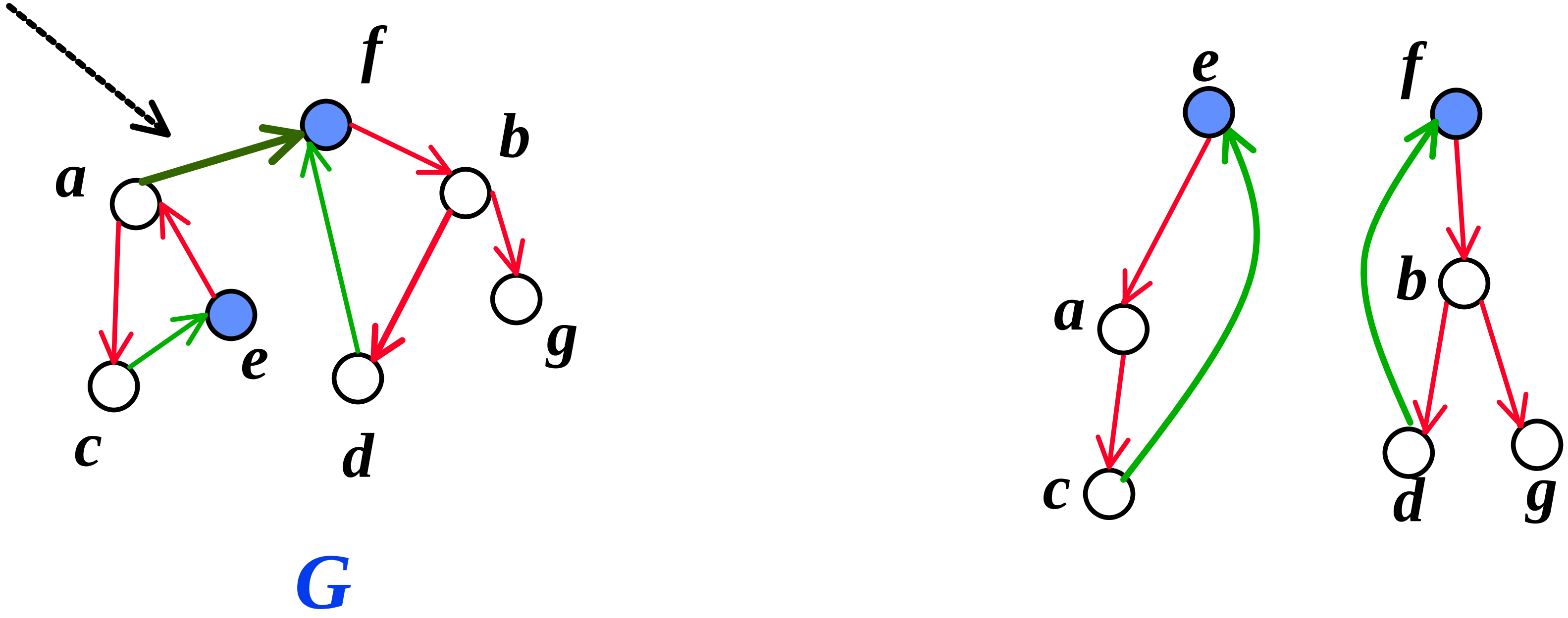
CFC_1 CFC_2 CFC_3

$f[e] > f[a] > f[c] \quad > \quad f[f] > f[b] > f[g] > f[d]$

$f[f] > f[b] > f[g] > f[d]$

$f[g] > f[d]$

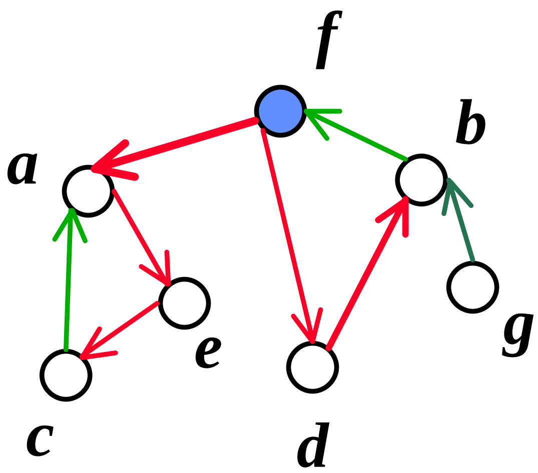
Calcolo delle CFC



$f[e] > f[a] > f[c] \quad > \quad f[f] > f[b] > f[g] > f[d]$

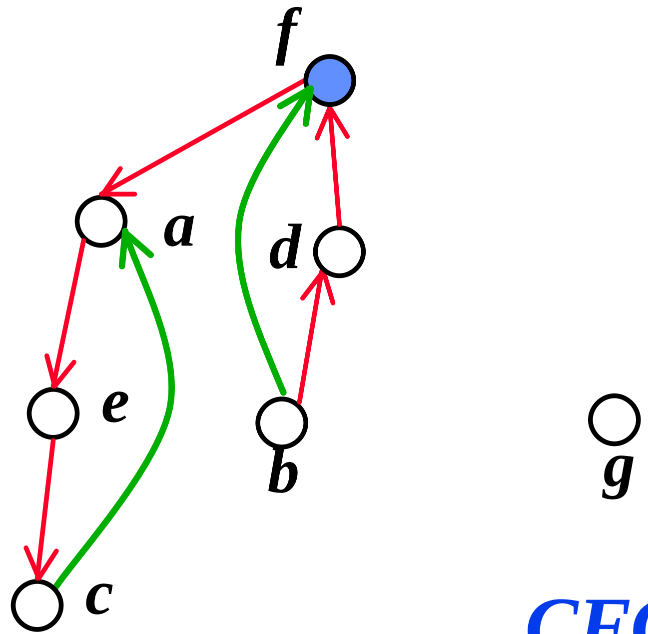
Supponiamo di non rispettare l'ordine decrescente e di scegliere il nodo *f* per primo.

Calcolo delle CFC



G^T

Il risultato è scorretto!



CFC_2

CFC_1?

Supponiamo di non rispettare l'ordine decrescente e di scegliere il nodo *f* per primo.

Ci basta cercare i vertici che lo possono raggiungere (**tra quelli che *r* stesso raggiunge**).

Algoritmo per il calcolo delle CFC

1 ***DFS(G)***

2 **Calcola il *grafo trasposto G^T***

3 ***DFS(G^T)*** **ma esaminando i vertici in ordine decrescente di tempo *f[v]* di fine visita**

4 **fornisci i vertici di ogni albero della *foresta DF* prodotta al *passo 3* come una *diversa CFC***

Correttezza di CFC(G)

Teorema: ***CFC(G)*** **calcola correttamente le *componenti fortemente connesse* del grafo orientato *G*.**

Dimostrazione: **Per induzione sul numero di *alberi DF* trovati durante la *DFS* di G^T, dimostriamo che i vertici di ogni *albero DF* formano una *CFC*.**

Ipotesi induttiva: ***Ogni albero DF prodotto è una CFC.***

Passo Base: **inizialmente non ci sono alberi precedenti. L'ipotesi induttiva vale banalmente.**

Infatti: **La radice *r* dell'*ultimo albero DF* è il vertice terminato per ultimo in tutto il grafo *G*.**

r **raggiunge in *G* tutti i vertici del suo *albero DF***

i vertici che *r* raggiunge in G^T sono quelli che lo raggiungono in *G*, quindi otteniamo una *CFC* di *G*.

Correttezza di CFC(G)

Teorema: ***CFC(G)*** **calcola correttamente le *componenti fortemente connesse* del grafo orientato *G*.**

Dimostrazione:

Passo Induttivo: **Consideriamo l'albero DF *T* con radice *r* prodotto da *DFS* su G^T e sia $C(r)=\{v \in V: \phi(v)=r\}$.**

Dimostriamo che *u* è aggiunto a *T se e solo se* $u \in C(r)$.

se: **Per il *Teorema 2* (sotto), ogni vertice in *C(r)* viene messo nello stesso *albero DF* dalla prima *DFS*.**

Poiché $r \in C(r)$, e *r* è la radice del nuovo *albero DF*, ogni elemento di *C(r)* verrà messo in *T* dalla *DFS* su G^T

Teorema 2: **In ogni *DFS*, tutti i vertici nella *stessa CFC* compaiono nello *stesso albero DF*.**

Correttezza di CFC(G)

Teorema: ***CFC(G)*** **calcola correttamente le *componenti fortemente connesse* del grafo orientato *G*.**

Dimostrazione: **Dimostriamo che u è aggiunto a T *se e solo se* $u \in C(r)$.**

solo se: **Dimostriamo che ogni vertice w tale che $f[\varphi(w)] < f[r]$ o $f[\varphi(w)] < f[r]$ non è posto in T.**

Per induzione sul numero di alberi costruiti, ogni w tale che $f[\varphi(w)] > f[r]$ non è posto in T, poiché quando r è selezionato dal ciclo in *DFS*, w è già stato messo nell'albero con radice $\varphi(w)$.

Ogni w tale che $f[\varphi(w)] < f[r]$ non può essere posto in T, se così fosse, allora $w \overset{p}{\leadsto} r$ e dalla formula (1) e da $r = \varphi(r)$ segue che $f[\varphi(w)] \geq f[\varphi(r)] = f[r]$, che contraddice $f[\varphi(w)] < f[r]$.

$$u \overset{p}{\leadsto} v \text{ implica che } f[\varphi(v)] \leq f[\varphi(u)] \qquad (1)$$

Correttezza di CFC(G)

Teorema: ***CFC(G)*** **calcola correttamente le componenti fortemente connesse del grafo orientato G.**

Dimostrazione: **Dimostriamo che u è aggiunto a T *se e solo se* $u \in C(r)$.**

solo se: **Ogni w tale che $f[\varphi(w)] < f[r]$ non può essere posto in T, se così fosse, allora $w \rightarrow r$ e dalla formula (1) e da $r = \varphi(r)$ segue che $f[\varphi(w)] \geq f[\varphi(r)] = f[r]$, che contraddice $f[\varphi(w)] < f[r]$.**

Quindi, T contiene solo quei vertici u per i quali $f[\varphi(u)] = r$.

Cioè, T è proprio uguale alla componente fortemente connessa $C(r)$, e ciò completa la dimostrazione

Esercizi su CFC

Dal libro di testo:

Esercizio 23.5-4

Esercizio 23.5-5