Soluzioni dell'esame scritto di logica matematica P-Z, 13-01-03

(Devo ancora trascrivere il tableau)

1) Per quali valori reali di α, β la funzione di dominio $D := \{x \in \mathbf{R} : (x+1)^2 \leq \alpha^2 + (\beta+1)^2\}$ definita da

$$f : D \to \mathbf{R} \quad , \quad f(x) := (\alpha^2 + \beta^2 + 1)x^2$$

è iniettiva? Per quali è suriettiva?

Il dominio D consiste dei punti distanti da -1 al più $\sqrt{\alpha^2 + (\beta+1)^2}$. Poiché l'iniettività di f sussiste se e solo se D non contiene alcuna coppia di numeri opposti, tale proprietà vale se e solo se D "non si estende oltre lo 0" (verso destra). Formalmente, $\sqrt{\alpha^2 + (\beta+1)^2} \leq 1$, cioè $\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta \leq 0$. Le coppie (α, β) giacciono quindi nel cerchio di raggio 1 e centro (0,-1) del piano cartesiano $O\alpha\beta$. La suriettività invece non sussiste in alcun caso, poiché f non può generare numeri negativi.

2) Dimostrare per induzione che $\forall n \geq 0 \ (n+3)^2 - n^2 = 9 + 6n$.

base: $(0+3)^2 - 0^2 = 9 + 6 \cdot 0$, vero.
step: $((n+1)+3)^2 - (n+1)^2 = ((n+3)+1)^2 - (n+1)^2 = (n+3)^2 + 1 + 2(n+3) - n^2 - 1 - 2n = (n+3)^2 - n^2 + 2(n+3) - 2n = (n+3)^2 - n^2 + 6 =^* 9 + 6n + 6 = 9 + 6(n+1)$.

* per l'ipotesi induttiva

3) Usando il metodo di Gentzen, dimostrare che

$$(\neg A \vee \neg B) \leftrightarrow (A \to \neg B) \ .$$

$$\neg(\neg A \vee \neg B), \neg A, \neg B \qquad \neg(A \to \neg B), \neg A, \neg B$$

La costruzione può ottenersi dal basso all'alto, come segue.

$$\begin{array}{cccc}
\neg\neg A, \neg A & \neg\neg B, \neg B & A, \neg A & \neg\neg B, \neg B \\
| & | & | & | \\
\multicolumn{2}{c}{\neg(\neg A \vee \neg B), \neg A, \neg B} & \multicolumn{2}{c}{\neg(A \to \neg B), \neg A, \neg B} \\
\multicolumn{2}{c}{\neg(\neg A \vee \neg B), (A \to \neg B)} & \multicolumn{2}{c}{\neg(A \to \neg B), (\neg A \vee \neg B)} \\
\multicolumn{2}{c}{(\neg A \vee \neg B) \to (A \to \neg B)} & \multicolumn{2}{c}{(A \to \neg B) \to (\neg A \vee \neg B)} \\
\multicolumn{2}{c}{|} & \multicolumn{2}{c}{|} \\
\multicolumn{4}{c}{(\neg A \vee \neg B) \leftrightarrow (A \to \neg B)}
\end{array}$$