Questa è la dimostrazione di $\vdash (A \to \neg A) \to \neg A$ con il metodo di Hilbert, riportata sul testo di Ben Ari. In effetti si può notare l'uso di teoremi ausiliari, precedemente dimostrati. Dunque tale esercizio è senz'altro interessante e illuminante, ma d'altro canto è assai arduo da impostare "su due piedi" come avventatamente pensavo di fare io a lezione. Perciò sono grato a chi mi ha proposto di svolgere tale esercizio, e a tutti i presenti alla lezione per aver richiesto la mia spiegazione.

1 $\{A \to \neg A, \neg\neg A\} \vdash \neg\neg A$ ipotesi
2 $\{A \to \neg A, \neg\neg A\} \vdash A$ teorema **I**
3 $\{A \to \neg A, \neg\neg A\} \vdash A \to \neg A$ ipotesi
4 $\{A \to \neg A, \neg\neg A\} \vdash \neg A$ MP 2,3
5 $\{A \to \neg A, \neg\neg A\} \vdash A \to (\neg A \to \neg(A \to A))$ teorema **II**
6 $\{A \to \neg A, \neg\neg A\} \vdash \neg A \to \neg(A \to A)$ MP 2,5
7 $\{A \to \neg A, \neg\neg A\} \vdash \neg(A \to A)$ MP 4,6
8 $\{A \to \neg A\} \vdash \neg\neg A \to \neg(A \to A)$ teorema deduttivo su 7
9 $\{A \to \neg A\} \vdash (A \to A) \to \neg A$ contrapposizione (usando l'assioma 3)
10 $\{A \to \neg A\} \vdash A \to A$ teorema **III**
11 $\{A \to \neg A\} \vdash \neg A$ MP 9,10
12 $\vdash (A \to \neg A) \to \neg A$ teorema deduttivo su 11.

Il teorema **I** è $\neg\neg A \vdash A$, il teorema **II** è $\vdash \neg A \to (A \to B)$, che è un ingrediente fondamentale per il nostro scopo (noi usiamo tale teorema sostituendo la formula $\neg A$ ad A e $\neg(A \to A)$ a B), usando anche il teorema **I**. Il teorema **II** può essere dimostrato come segue.

1 $\{\neg A\} \vdash \neg A$ ipotesi
2 $\{\neg A\} \vdash \neg B \to \neg A$ assioma 1 + MP
3 $\{\neg A\} \vdash A \to B$ assioma 3 + MP
4 $\vdash \neg A \to (A \to B)$ teorema deduttivo.

Il teorema **III** è stato dimostrato a lezione. Contrapposizione e teorema deduttivo dovrebbero essere chiari.

Se invece si vuole dimostrare $\vdash (\neg A \to A) \to A$ basta sostituire $\neg A$ ad A nel nostro teorema, e sfruttare l'equivalenza di $\neg\neg A$ e A.