Corso di Logica Matematica, a.a. 2002/03, canale A-D
Docente: Prof.ssa Anna Labella

Esercizi sulla logica dei predicati: formule aperte e chiuse, interpretazioni e modelli, inferenze

Paola Rizzo

1. $p(x)$ denota la frase "$x + 2 > 5$"; (a) che tipo di formula è $p(x)$? (b) dire su quali dei seguenti insiemi può essere definita tale formula: (1) $\mathcal{N}$; (2) $M = \{-1, -2, -3, \ldots\}$; (3) $O = \{a, b, c, \ldots\}$.

2. Determinare l'insieme di verità di ciascuno dei seguenti enunciati definiti su $\mathcal{R}$: (a) $\forall x(\mid x \mid = x)$; (b) $\exists x(x^2 = x)$; (c) $\forall x(x + 1 > x)$; (d) $\exists x(x + 2 = x)$; (e) $\exists x(\mid x \mid = 0)$.

3. Negare gli enunciati dell'esercizio 2.

4. Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determinare il valore di verità di ciascuno dei seguenti enunciati definiti su A: (a) $\exists x(x+3 = 10)$; (b) $\forall x(x+3 < 10)$; (c) $\exists x(x + 3 < 5)$; (d) $\forall x(x + 3 \leq 7)$.

5. Negare ciascuno degli enunciati dell'esercizio 4.

6. Negare ciascuno dei seguenti enunciati: (a) $\forall x(p(x)) \wedge \exists y(q(y))$; (b) $\exists x(p(x)) \vee \forall y(q(y))$.

7. Negare ciascuna delle frasi seguenti: (a) se c'è una rivolta qualcuno viene ucciso; (b) si è fatto giorno e tutti si sono alzati dal letto.

8. Dato $B = \{2, 3, \ldots, 8, 9\}$, trovare un controesempio per ciascuna delle formule seguenti: (a) $\forall x \in B, x + 5 < 12$; (b) $\forall x \in B, x$ è primo; (c) $\forall x \in B, x^2 > 1$; (d) $\forall x \in B, x$ è pari.

9. Dato $\{1, 2, 3\}$ come insieme universale, determinare il valore di verità di ciascuna delle formule seguenti:

   (a) $\exists x \forall y, x^2 < y + 1$

   (b) $\forall x \exists y, x^2 + y^2 < 12$

   (c) $\forall x \forall y, x^2 + y^2 < 12$

   (d) $\exists x \forall y \exists z, x^2 + y^2 < 2z^2$

   (e) $\exists x \exists y \forall z, x^2 + y^2 < 2z^2$

10. Sia $A = \{1, 2, \ldots, 9, 10\}$. Si consideri ciascuna delle formule seguenti: se è un enunciato, se ne determini il valore di verità; se è una formula aperta, determinare il suo insieme di verità.

   (a) $(\forall x \in A)(\exists y \in A)(x + y < 14)$

   (b) $(\forall y \in A)(x + y < 14)$

   (c) $(\forall x \in A)(\forall y \in A)(x + y < 14)$

   (d) $(\exists y \in A)(x + y < 14)$

11. Negare ciascuno dei seguenti enunciati:

   (a) $\exists x \forall y p(x, y)$

   (b) $\forall x \forall y p(x, y)$

   (c) $\exists y \exists x \forall z p(x, y, z)$

   (d) $\forall x \exists y (p(x) \vee q(y))$

   (e) $\exists x \forall y (p(x, y) \rightarrow q(x, y))$

   (f) $\exists y \exists x (p(x) \wedge \neg q(y))$

12. Mostrare che le seguenti inferenze non sono valide costruendo un diagramma di Venn in cui sono vere le premesse ma è falsa la conclusione:

   (a) Alcuni studenti sono pigri; tutti i maschi sono pigri; quindi alcuni studenti sono maschi.

   (b) Tutti gli studenti sono pigri; nessuna persona ricca è uno studente; quindi le persone pigre non sono ricche.

13. Per ciascuno dei seguenti insiemi di premesse $P_1, \ldots, P_n$, trarre una conclusione (inferenza) valida che si basi su *tutte* le premesse:

    (a) P_1: nessuno studente è pigro; P_2: Giovanni è un artista; P_3: tutti gli artisti sono pigri.

    (b) P_1: tutti gli avvocati sono ricchi; P_2: i poeti sono capricciosi; P_3: Marco è un avvocato; P_1: nessuna persona capricciosa è ricca.