Corso di Logica Matematica, a.a. 2002/03, canale A-D
Docente: Prof.ssa Anna Labella

Esercizi sulle relazioni: relazioni d'equivalenza, partizioni, e relazioni d'ordine

Paola Rizzo

1. Sia $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. Dire se ciascuna delle seguenti famiglie di insiemi è una partizione di A:
   (a) $\{B_1 = \{a, c, e\}, B_2 = \{b\}, B_3 = \{d, g\}\}$;
   (b) $\{C_1 = \{a, e, g\}, C_2 = \{c, d\}, C_3 = \{b, e, f\}\}$;
   (c) $\{D_1 = \{a, b, e, g\}, D_2 = \{c\}, D_3 = \{d, f\}$;
   (d) $\{E_1 = \{a, b, c, d, e, f, g\}\}$.

2. Per ciascuna delle seguenti relazioni si elenchino le eventuali proprietà di cui essa gode, e si stabilisca se si tratti di una relazione d'equivalenza, d'ordine, o d'ordine stretto: (a) essere fratello di; (b) essere parallela a (nel dominio delle rette del piano); (c) avere la stessa area di; (d) essere perpendicolare a (nel dominio delle rette del piano); (e) essere maggiore di; (f) essere maggiore di o uguale a; (f) essere divisore di; (g) essere contenuto in.

3. Si consideri l'insieme $I = \{Milano, Napoli, Palermo, Varese, Caserta, Bari\}$: (a) definire una o più relazioni di equivalenza su I; (b) per ciascuna relazione R determinare l'insieme quoziente I/R.

4. Sia $S = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ un insieme di studenti, di cui a, d, e frequentano le lezioni del I canale, b, f, g, h frequentano il II canale, c, i frequentano il III canale. Si consideri la relazione $R =$ "...frequenta lo stesso canale di ...": (a) scrivere R in rappresentazione caratteristica;

(b) dire se è possibile ottenere una partizione di S in classi di equivalenza secondo R; (c) in caso affermativo, rappresentare tale partizione, e indicare l'insieme quoziente S/R.

5. Si consideri l'insieme di tutte le possibile coppie (quozienti) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \ldots$ di numeri interi. Si costruisca una partizione dell'insieme considerato tale che ciascuna classe di equivalenza contenga coppie equivalenti, del tipo $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \ldots$ Qual'è la relazione di equivalenza che genera tale partizione? A quale tipo di numero corrisponde ciascuna partizione?

6. Sia R la relazione su $\mathcal{N}$ definita da "$(x - y)$ è divisibile per 5": (a) scrivere R in rappresentazione caratteristica; (b) dimostrare che R è una relazione di equivalenza.

7. Si consideri l'insieme $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$, cioè l'insieme di coppie ordinate dei numeri naturali. Sia R la relazione su $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ definita nel modo seguente: (a, b) è in relazione a (c, d) (scritto $(a, b) \simeq (c, d)$) se e solo se $ad = bc$. Dimostrare che R è una relazione di equivalenza e quindi induce una partizione di $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$.

8. In che modo gli esercizi 5 e 7 sono collegati l'uno all'altro?

9. La relazione su $\mathcal{N}$ definita da "x divide y" è una relazione d'ordine parziale:

   (a) inserire il simbolo corretto, $\prec$ (precede), $\succ$ (domina), o $\|$ (non comparabili) fra ciascuna delle seguenti coppie di numeri: (*i*) $2, 8$; (*ii*) $18, 24$; (*iii*) $9, 3$; (*iv*) $5, 15$;

   (b) dire se ciascuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathcal{N}$ è totalmente ordinato: (*i*) $\{24, 2, 6\}$; (*ii*) $\{3, 15, 5\}$; (*iii*) $\{15, 5, 30\}$; (*iv*) $\{2, 8, 32, 4\}$; (*v*) $\{1, 2, 3, \ldots\}$; (*vi*) $\{7\}$.

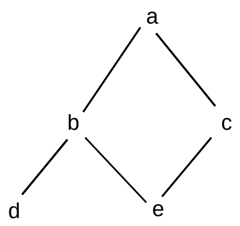
10. Sia $\mathcal{A}$ una qualsiasi famiglia di insiemi: che tipo di relazione è quella definita su $\mathcal{A}$ da "x è un sottoinsieme di y"?

11. Sia A un qualsiasi sottoinsieme dei numeri reali: che tipo di relazione è quella definita su A da "$x \leq y$"?

12. Che tipo di relazione è quella definita sui numeri naturali da "x è un multiplo di y"? Inserire il simbolo corretto ($\prec$, $\succ$, $\|$) fra ciascuna delle seguenti coppie di numeri: (a) $6, 12$; (b) $15, 3$; (c) $17, 17$.

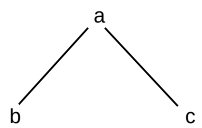
13. Sia $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ ordinato in modo lessicografico. Inserire il simbolo corretto ($\prec$, $\succ$, $\|$) fra ciascuna delle seguenti coppie di elementi di $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$: (a) $(5, 78), (7, 1)$; (b) $(4, 6), (4, 2)$; (c) $(5, 5), (4, 23)$; (d) $(1, 3), (1, 2)$.

14. Sia $V = \{a, b, c, d, e\}$ ordinato dal seguente diagramma:



Inserire il simbolo corretto ($\prec$, $\succ$, $\|$) fra ciascuna coppia di elementi: (a) a, e; (b) b, c; (c) d, a; (d) c, d.

15. Sia $A = \{a, b, c\}$ ordinato come segue:



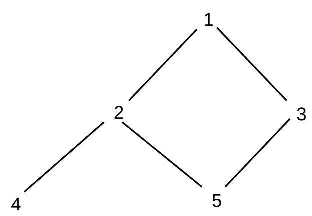
Sia $\mathcal{A}$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi totalmente ordinati, non vuoti, di A, e sia $\mathcal{A}$ parzialmente ordinato mediante inclusione insiemistica. Costruire un diagramma dell'ordinamento di $\mathcal{A}$.

16. Sia $\mathcal{A}$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi A dei numeri naturali, dove A ha le seguenti proprietà: A è finito e il massimo comune divisore degli elementi di A è 1.

    (a) Dire se ciascuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathcal{N}$ appartiene ad $\mathcal{A}$: (*i*) $\{2, 3, 8\}$; (*ii*) $\{2, 3, 5, 8\}$; (*iii*) $\{2, 5\}$; (*iv*) $\{2, 3, 4, 5, \ldots\}$; (*v*) $\{4, 6, 8\}$; (*vi*) $\{2, 3\}$;

    (b) sia $\mathcal{B}$ la sottofamiglia di $\mathcal{A}$ che contiene gli insiemi, fra quelli elencati al punto precedente, che appartengono ad $\mathcal{A}$, e si consideri un ordinamento su $\mathcal{B}$ definito dall'inclusione insiemistica, cioè $X \preceq Y$ se $X \subseteq Y$: costruire un diagramma dell'ordinamento di $\mathcal{B}$.

17. Sia $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ordinato come segue:



Sia $\mathcal{B}$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi totalmente ordinati di B che contengono 2 o più elementi, e sia $\mathcal{B}$ parzialmente ordinato mediante inclusione insiemistica: costruire un diagramma dell'ordinamento di $\mathcal{B}$.