

Corso di Logica Matematica, a.a. 2002/03, canale A-D
Docente: Prof.ssa Anna Labella

Esercizi sulla logica degli enunciati: dimostrazioni
mediante il sistema di Gentzen, formalizzazione e
inferenza, dimostrazioni induttive

Paola Rizzo

1. Usando il sistema di Gentzen, verificare se i seguenti enunciati sono tautologie:
 - (a) $((A \vee B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C));$
 - (b) $((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C);$
 - (c) $A \rightarrow (A \rightarrow \neg A);$
 - (d) $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow \neg B);$
 - (e) $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A);$
 - (f) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C)));$
 - (g) $((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C).$
2. Stabilire, usando tutti i metodi studiati finora, quali delle seguenti inferenze sono corrette:
 - (a) se 3 è pari oppure è primo, e 3 non è primo, allora 3 è pari
 - (b) 3 è pari oppure 3 è primo; 3 non è primo; dunque 3 è pari
Qual'è la differenza fra le inferenze 2a e 2b?
 - (c) se sono colpevole devo essere punito; dato che non sono colpevole,
non devo essere punito

- (d) devo essere punito se e solo se sono colpevole; non sono colpevole, quindi non devo essere punito
Qual'è la differenza fra le inferenze 2c e 2d?
 - (e) se Roberto è romano allora è italiano; Roberto non è romano, e quindi Roberto non è italiano
qual'è la relazione fra quest'inferenza e la 2c?
 - (f) se manca la benzina la moto non parte, e manca la benzina, quindi la moto non parte
 - (g) se manca la benzina allora la moto non parte; la moto non parte, dunque manca la benzina
 - (h) se manca la benzina la moto non parte; la moto parte, quindi c'è la benzina
 - (i) se 5 è un cavallo, allora il Sole è un panettone; 5 è un cavallo, quindi il Sole è un panettone
 - (j) se c'è fumo allora c'è arrosto: non c'è fumo, quindi non c'è arrosto
 - (k) se c'è fumo allora c'è arrosto; poiché non c'è arrosto, non c'è fumo
3. Facendo riferimento ai risultati dell'esercizio 2, trarre una conclusione valida da ciascuno dei seguenti insiemi di premesse:
- (a) se Marco beve vino si ubriaca; poiché Marco non si ubriaca ...
 - (b) se Marco beve vino si ubriaca; Marco non beve vino, perciò ...
 - (c) se Marco non ha il passaporto, allora non va in Russia; Marco va in Russia, per cui ...
 - (d) se Marco non ha il passaporto, allora non va in Russia; Marco ha il passaporto, e quindi ...
 - (e) Se Aldo ha la febbre non esce di casa, ma Aldo non ha la febbre, e quindi ...
 - (f) Se Aldo ha la febbre allora non esce di casa, ma Aldo esce di casa, e dunque ...

4. Stabilire, usando tutti i metodi studiati finora, quali delle seguenti inferenze sono corrette:

- (a) Se Aldo ha vinto, allora Mario ha perso; se Mario ha perso, allora Giulio ha vinto; quindi, se Aldo ha vinto, allora Giulio ha vinto
- (b) Se Anna è ligure allora Chiara è piemontese, quindi Anna non è ligure o Chiara non è piemontese
- (c) Se Anna è ligure allora Chiara è piemontese; di conseguenza Anna è ligure e Chiara è piemontese
- (d) Anna è ligure e Chiara è piemontese; quindi, se Anna è ligure, Chiara è piemontese

5. Si dimostri che tutti gli enunciati seguenti sono validi:

$$A \rightarrow (A \rightarrow A)$$

$$A \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A))$$

$$A \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A)))$$

...

In generale, dimostrare che l'enunciato $F_n = A \rightarrow F_{n-1}$, dove $F_0 = A \rightarrow (A \rightarrow A)$, è valido.

6. Quali dei seguenti enunciati sono validi?

$$A \rightarrow B$$

$$A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$A \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow B))$$

$$A \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow A)))$$

$$A \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow B))))$$

In generale, date le seguenti formule che definiscono gli enunciati sopra elencati, dire quali di esse sono valide:

$$F_0 = A \rightarrow B$$

$$G_0 = A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$F_{n+1} = A \rightarrow (B \rightarrow F_n)$$

$$G_{n+1} = A \rightarrow (B \rightarrow G_n)$$

7. Sia definito induttivamente il seguente insieme infinito di enunciati:

$$F_0 = B \rightarrow A$$

$$F_{n+1} = B \rightarrow F_n$$

$$G_0 = A \rightarrow F_0$$

$$G_{n+1} = A \rightarrow F_{n+1}$$

- (a) Quali sono le formule F_3 e G_3 ?
- (b) Mostrare, usando tutti i metori studiati nel corso, che l'insieme è costituito da tautologie
8. Sia data la seguente definizione induttiva di un insieme infinito I di enunciati:
- $$F_0 = A \rightarrow \neg A$$
- $$G_0 = F_0 \rightarrow \neg A$$
- $$F_{n+1} = G_n \rightarrow \neg A$$
- $$G_{n+1} = F_{n+1} \rightarrow \neg A$$
- (a) Quali sono F_2 e G_2 ?
- (b) Quali enunciati sono validi?
9. Sia data la seguente definizione induttiva di un insieme infinito J di enunciati:
- $$F_0 = A \rightarrow \neg A$$
- $$F_{n+1} = F_n \rightarrow \neg A$$
- (a) Quali sono F_2 e F_3 ?
- (b) L'insieme di enunciati J è diverso dall'insieme I dell'esercizio 8?
- (c) Quali enunciati in J sono validi? Come lo si può dimostrare?
10. Sia dato il seguente insieme infinito di enunciati:
- $$\neg(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow A$$
- $$\neg(\neg(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A) \rightarrow A$$
- $$\neg(\neg(\neg(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A) \rightarrow A$$
- $$\dots$$
- $$\neg(\dots \neg(\neg B \rightarrow \neg A) \dots \rightarrow \neg A) \rightarrow A$$
- (a) Dare una definizione induttiva dell'insieme;
- (b) mostrare, usando tutti i metori studiati nel corso, che l'insieme è costituito da tautologie.