Corso di Logica Matematica, a.a. 2002/03, canale A-D
Docente: Prof.ssa Anna Labella

Esercizi sull'algebra di Boole: proprietà, ordinamento, circuiti, polinomi

Paola Rizzo

Sia definita un'algebra booleana come un insieme B di elementi $a, b, \ldots$ e due operazioni binarie $+$ e $*$ chiamate rispettivamente *somma* e *prodotto*, e siano date le seguenti proprietà:

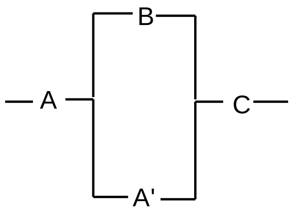
- Commutativa: $a + b = b + a$; $a * b = b * a$
- Associativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$; $(a * b) * c = a * (b * c)$
- Distributiva: $a + (b * c) = (a + b) * (a + c)$; $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$
- Identità: esistono un minimo 0 e un massimo 1 tali che, per qualsiasi $a \in B$: $a + 0 = a$; $a * 1 = a$
- Complemento: per qualsiasi $a \in B$ esiste un $a^{'} \in B$, chiamato il *complemento* di a, tale che: $a + a^{'} = 1$; $a * a^{'} = 0$.

1. Si dimostri la proprietà di idempotenza: $a + a = a$; $a * a = a$
2. Dimostrare la seguente proprietà: $a + 1 = 1$; $a * 0 = 0$
3. Dimostrare la proprietà di assorbimento: $a + (a * b) = a$; $a * (a + b) = a$.
4. Si dimostri per assurdo l'unicità del complemento: se $a_1^{'}$ e $a_2^{'}$ sono complementi di a, cioè $a + a_1^{'} = 1$, $a + a_2^{'} = 1$, $a * a_1^{'} = 0$, e $a * a_2^{'} = 0$, allora $a_1^{'} = a_2^{'}$.

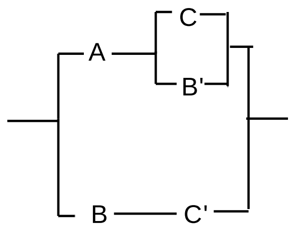
5. Si dimostri che la relazione definita su un'algebra booleana B da $a \preceq b$ sse $a + b = b$ è una relazione di ordinamento parziale su B.

6. Sia B un'algebra booleana, e siano $a, b \in B$: si dimostri che $a + b$ è un comune maggiorante per la coppia (a, b).

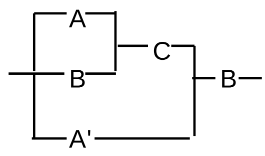
7. Determinare il polinomio booleano di ciascuno dei seguenti circuiti:



(1)



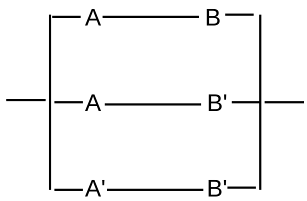
(2)



(3)

8. Disegnare un circuito per ciascuno dei seguenti polinomi booleani: (a) $(A \wedge B) \vee (A' \wedge (B' \vee A \vee B))$; (b) $(A \vee B) \wedge C \wedge (A' \vee B \vee C')$.

9. Disegnare un circuito semplificato equivalente al seguente:



10. Verificare la soluzione dell'esercizio 9 mediante le tavole di verità.

11. Disegnare un circuito per ciascuno dei seguenti polinomi booleani:

    (a) $A \vee (B \wedge C)$;
    (b) $A \wedge (B \vee C)$;
    (c) $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$;
    (d) $(A \wedge B) \vee (C \wedge D)$;
    (e) $(A \vee B) \wedge (A' \vee (C \wedge B'))$;
    (f) $((A \wedge B) \vee C) \wedge (D \vee (A' \vee B))$.