Corso di Logica Matematica, a.a. 2002/03, canale A-D
Docente: Prof.ssa Anna Labella

Esercizi sulle dimostrazioni per induzione

Paola Rizzo

1. Dimostrare in tutti i modi possibili che per ogni $n \in \mathcal{N}$ è: $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$.
2. Dimostrare in tutti i modi possibili che per ogni n naturale: $(n+2)^2 - n^2 - 4 = 4n$.
3. Dimostrare che $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$.
4. Dimostrare che $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.
5. Dimostrare che $1 + 5 + 9 + \ldots + (4n + 1) = (n + 1)(2n + 1)$.
6. Dimostrare per induzione che in un albero finito, non vuoto, il numero di nodi supera di 1 il numero degli archi.
7. Dimostrare per tutti gli $n \in \mathcal{N}_0$ che $n < 2^n$.
8. Sia $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ definita come $f(m, 0) = m$, $f(m, n + 1) = f(m, n) + 1$. (a) Qual'è il risultato di $f(52, 39)$? (b) Quale proprietà di $f(x, y)$ si può dimostrare in generale?
9. Dimostrare in tutti i modi possibili che per tutti i numeri naturali $n(n^2 + 5)$ è divisibile per 6.
10. Dimostrare che per un sottoinsieme infinito di $\mathcal{N}$, cioè a partire da un opportuno caso base, $n^2 < 2^n$.
11. Dimostrare che, se $\mathcal{L}$ è l'insieme di parole sull'alfabeto $A = \{0, 1\}$ definito da:

(a) $1 \in \mathcal{L}$
(b) se $w \in \mathcal{L}$ allora $wx \in \mathcal{L}$ con $x \in A$

allora $\mathcal{L}$ è il linguaggio delle parole che cominciano con 1.

12. Sia definita la funzione fattoriale come segue:

    (a) $1! = 1$
    (b) $n! = n \times (n-1)!$

    Dimostrare per induzione che $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$.