NOTE DEL CORSO DI FISICA PER STUDENTI DI SCIENZE BIOLOGICHE. AA 2001-2002

Meccanica

Prof. Valeria Ferrari

GRANDEZZE FISICHE:

Sono le grandezze in base alle quali descriviamo i fenomeni fisici; per esempio la velocita', la temperatura, la pressione, il potenziale elettrico, la resistenza elettrica, la forza, etc. etc. etc. Esse si dividono in

FONDAMENTALI: sono il minimo numero di grandezze necessarie per descrivere i fenomeni a noi noti.

DERIVATE: tutte le altre, che si possono scrivere in funzione delle precedenti.

Per misurare le grandezze fisiche e' necessario definire le unita' di misura. Nel 1971, nella 14^a Conferenza Generale dei Pesi e delle Misure, sono state selezionate 7 grandezze fondamentali del **SISTEMA INTERNAZIONALE di UNITA' (SI)**. Tra queste, la **lunghezza**, la **massa** e il **tempo** sono quelle che utilizzeremo nella prima parte di questo corso. Nel **SI** le unita' di misura ordinarie per queste grandezze sono

metro (m), kilogrammo (kg) e secondo (s)

I campioni delle unita' di misura devono essere, per quanto possibile, invariabili ed accessibili. Per questo nell'Ufficio Internazionale dei Pesi e Misure di Parigi ne sono stati depositati i campioni. Vediamo come sono state definite le unita' di misura fondamentali per queste grandezze.

Lunghezza. Il metro e' definito, storicamente, come la decimillionesima parte della distanza tra polo ed equatore lungo la linea meridiana passante per Parigi (questa definizione risale alla rivoluzione francese, 1792). Il campione di lunghezza e' una sbarra di platino iridio (materiale poco deformabile), tenuta a 0^oC in modo che non subisca dilatazioni o contrazioni per effetto termico, e sostenuta meccanicamente in maniera che non subisca deformazioni elastiche. Piu' di recente e' sorta la necessita' di avere un'unita' di lunghezza molto piu' precisa; infatti oggi siamo in grado di misurare distanze estremamente piccole. Si e' pertanto definito il metro come un numero di lunghezze d'onda pari a

1.650.763,73

della luce color rosso arancio emessa dalla scarica in un tubo a gas rarefatto di Cripton-86. (Il numero deriva dal fatto che si voleva far coincidere il piu' possibile la nuova unita' con la vecchia)

Ma non e' ancora finita: nel 1983 per avere un campione ancora piu' preciso si e' arrivati alla seguente definizione
il metro e' la distanza che la luce percorre nel vuoto in un intervallo di tempo pari a 1/299.792.458 secondi.

Massa. L'unita' di massa e' definita come un cilindro di platino iridio, cui viene convenzionalmente attribuito il valore di 1 kg. Anch'esso e' conservato con modalita' analoghe al campione di lunghezza nel Museo dei Pesi e delle Misure di Parigi.

Tempo. Qualsiasi fenomeno periodico puo' essere usato per definire un'unita' di misura del tempo: ad esempio le oscillazioni sincrone di un pendolo o di un cristallo di quarzo, le vibrazioni periodiche degli atomi, o anche il ripetersi periodico dei giorni. Se per esempio scegliamo come unita' di tempo la durata di un'oscillazione completa di un pendolo, la misura della durata temporale di un fenomeno qualsiasi consistera' nel contare quante oscillazioni fa il pendolo mentre il fenomeno si verifica.
Convenzionalmente il secondo viene definito come

$$1\ s = \frac{1}{86400} \text{ giorno solare medio}$$

Nel 1967 la 13^a Conferenza Generale dei Pesi e delle Misure ha definito una nuova unita' di tempo molto piu' stabile (il giorno solare e' soggetto a moltissime variazioni nel tempo):

un secondo e' il tempo necessario alla luce, di una specifica lunghezza d'onda, emessa dal Cesio 133 per effettuare 9.191.631.770 oscillazioni.

ATTENZIONE

Le unita' di misura vanno scelte in maniera opportuna a seconda di quali grandezze si vogliono misurare. Per esempio se dobbiamo misurare distanze astronomiche (il diametro della nostra Galassia e' $\sim 10^{21}\ cm$) o grandezze atomiche (il raggio di un nucleo atomico e' $r \sim 2.8 \cdot 10^{-13}\ cm$) non sara' sensato usare il metro. Potremo scegliere rispettivamente, ad esempio,

l'anno-luce(distanza che la luce percorre in un anno)$= 9.46 \cdot 10^{17}\ cm$, e

l'angstrom$=10^{-8}\ cm$

Analogamente, se vogliamo misurare le masse delle stelle useremo come unita' di misura la massa del sole

$M_{\odot} = 1.989 \cdot 10^{30}\ kg$

ma per masse degli atomi useremo la dodicesima parte della massa dell'atomo di un isotopo del carbonio

$^{12}C = 12\ u, \qquad \text{dove} \qquad 1\ u = 1.66 \cdot 10^{-27}\ kg$

Cosi' ad esempio, la massa della stella τ-Bootis e' $1.37\ M_{\odot}$, mentre quella dell'atomo di sodio e' $22.99\ u$.

GRANDEZZE SCALARI E VETTORIALI

Una grandezza **scalare** e' definita solamente da un numero. ESEMPI: temperatura, densita', resistenza, etc. Una grandezza **vettoriale** e' definita da modulo (o intensita'), direzione e verso. ESEMPI: velocita', accelerazione, campo elettrico, campo gravitazionale, etc.

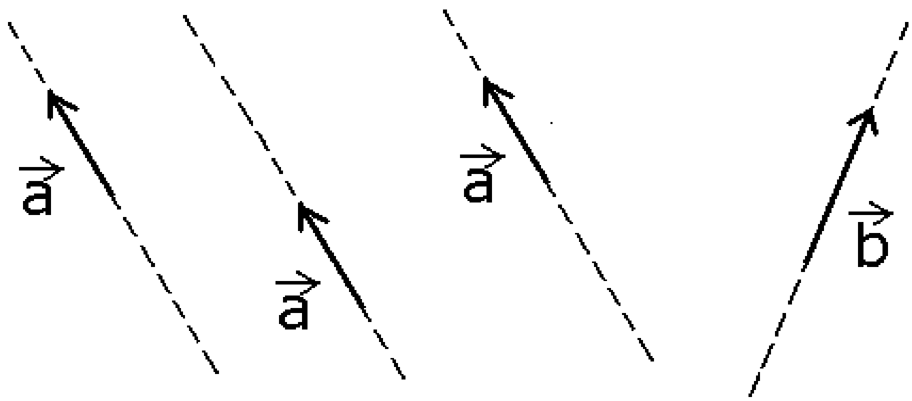
VETTORI

Un vettore e' una grandezza geometrica definita da modulo, direzione e verso.

MODULO= lunghezza del segmento che rappresenta il vettore. Convenzionalmente il modulo del vettore $\vec{a}$ si indica con a, oppure con $|a|$

DIREZIONE= retta cui il segmento appartiene

VERSO= orientazione del segmento sulla retta

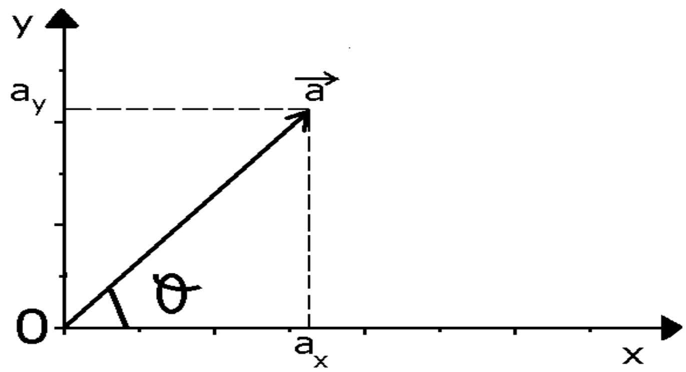


NOTA BENE: i vettori indicati come $\vec{a}$ sono in realta' **lo stesso vettore**, perche' hanno lo stesso modulo (il segmento che li rappresenta ha uguale lunghezza), la stessa direzione (le rette cui appartengono sono parallele) e lo stesso verso. Invece il vettore $\vec{b}$ e' diverso. **ALTRA COSA IMPORTANTE**: dato un vettore $\vec{a}$, ne posso definire infiniti altri uguali *trasportando il vettore* $\vec{a}$ *parallelamente a se stesso* nel modo seguente: a partire da un punto qualsiasi traccio una retta parallela alla direzione di $\vec{a}$ e riporto su questa un segmento che e' lungo quanto $\vec{a}$ ed ha la stessa orientazione.

DEFINIZIONE: Si definisce **VERSORE** un vettore di lunghezza unitaria. In pratica un versore serve a individuare una direzione.

Componenti di un vettore

Sia dato un riferimento di assi cartesiani, che supponiamo, per semplicita', bidimensionale $\{x, y\}$. Sia $\vec{a}$ un vettore qualsiasi, che supponiamo di aver trasportato parallelamente in modo tale che il suo punto di applicazione coincida con l'origine del riferimento



Tracciando le perpendicolari dall'estremo di $\vec{a}$ agli assi coordinati, otteniamo due quantita' a_x e a_y che chiameremo **componenti** del vettore rispetto al riferimento scelto.
E' facile verificare che, se θ e' l'angolo che il vettore forma con l'asse x

$$a_x = a\cos\theta, \qquad \text{e} \qquad a_y = a\sin\theta,$$

per cui si avra' anche che

$$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x}.$$

Note a_x e a_y, possiamo ricavare il modulo del vettore come segue

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Le definizioni appena date si generalizzano immediatamente al caso in cui il vettore $\vec{a}$ sia definito nello spazio tridimensionale, invece che su un piano. In quasto caso fisseremo un riferimento di tre assi cartesiani $\{x, y, z\}$ e, chiamando a_z la componente di $\vec{a}$ lungo l'asse z, si avra'

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

OPERAZIONI TRA VETTORI

moltiplicazione per uno scalare

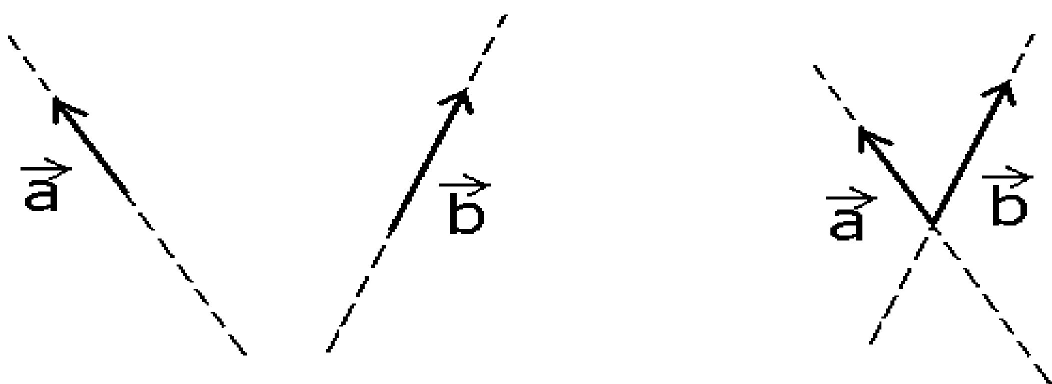
se moltiplico il vettore $\vec{a}$ per uno scalare (cioe' un numero) k, ottengo un nuovo vettore $\vec{b}$

$$\vec{b} = k\vec{a}$$

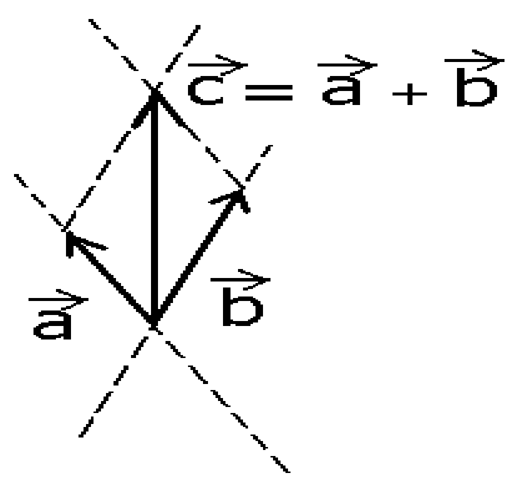
che ha la stessa direzione di $\vec{a}$, modulo pari a k volte quello di $\vec{a}$ e verso uguale o opposto a seconda che k sia positivo o negativo.

somma di vettori: regola del parallelogramma

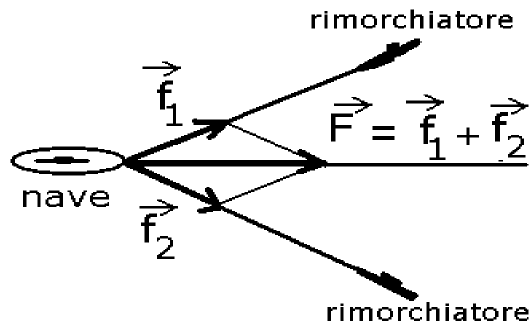
Per sommare due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, li sposto parallelamente a se stessi fino a che hanno lo stesso punto di applicazione, come indicato in figura



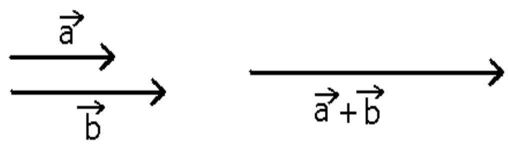
quindi traccio la diagonale del parallelogramma costruito su $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Il vettore somma, $\vec{c}$, e' il segmento diagonale orientato, che va dal punto di applicazione al vertice opposto del parallelogramma.



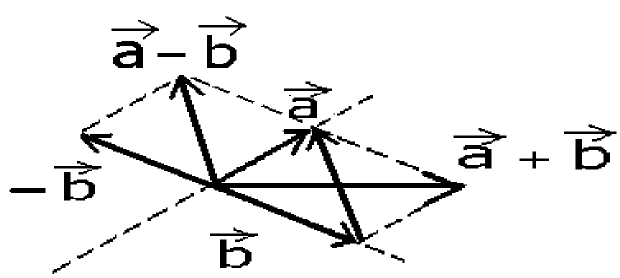
La regola del parallelogramma e' intuitiva se pensiamo che un vettore puo' rappresentare, per esempio, una forza. Supponiamo che una nave sia tirata da due rimorchiatori che esercitano su di essa le forze $\vec{f}_1$ e $\vec{f}_2$ come in figura.



La nave si muove nella direzione di $\vec{F}$ che e' la somma delle due forze applicate. Se due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono paralleli, la loro somma $\vec{c}$ e' un vettore che ha la stessa direzione, e per modulo la somma dei moduli

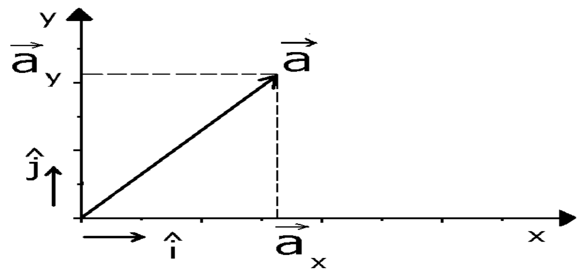


differenza di vettori: ancora la regola del parallelogramma Fare la differenza tra il vettore $\vec{a}$ e il vettore $\vec{b}$ e' equivalente a fare la somma tra $\vec{a}$ e $-\vec{b}$. Bastera' quindi invertire il verso di $\vec{b}$ e applicare la regola del parallelogramma



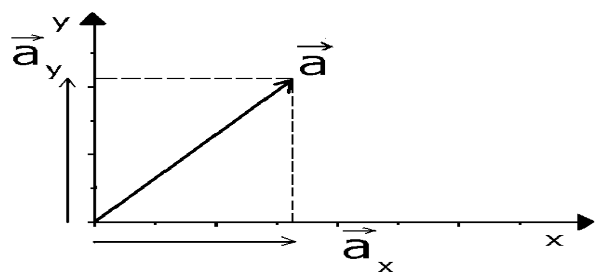
o, equivalentemente, considerare l'altra diagonale del parallelogramma costruito su $\vec{a}$ e $\vec{b}$ come indicato in figura

Utilizzando le operazioni definite prima, e cioe' la moltiplicazione per uno scalare e la regola del parallelogramma, possiamo dimostrare che un qualsiasi vettore si puo' scomporre nella somma di vettori diretti lungo gli assi coordinati. Vediamo come. Siano $\hat{i}$ e $\hat{j}$ i **versori** degli assi coordinati, detti anche **versori di base**.



Ricordiamo che le componenti del vettore $\vec{a}$ sono a_x e a_y. Se ora moltiplico il versore $\hat{i}$ per a_x e il versore $\hat{j}$ per a_y ottengo due vettori

$$\vec{a_x} = a_x\hat{i}, \qquad \text{e} \qquad \vec{a_y} = a_y\hat{j}.$$



Si vede immediatamente che, per la regola del parallelogramma, il vettore $\vec{a}$ e' la somma di $\vec{a_x}$ e $\vec{a_y}$, cioe'

$$\vec{a} = \vec{a_x} + \vec{a_y} \quad \text{o anche} \quad \vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j},$$

Le definizioni date si generalizzano immediatamente al caso in cui il vettore $\vec{a}$ e' definito nello spazio tridimensionale. Chiamando $\hat{k}$ il versore dell'asse z si avra'

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k},$$

Abbiamo visto che i vettori si sommano (o sottraggono) con la regola del parallelogramma, ma puo' essere molto scomodo eseguire questa operazione praticamente, specialmente nello spazio a tre dimensioni. Se pero' conosciamo le componenti dei singoli vettori, fare la somma e' molto semplice. Infatti se

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$$

e

$$\vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}$$

allora

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \vec{a} + \vec{b} \\ &= a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k} + b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k} \\ &= (a_x + b_x)\hat{\imath} + (a_y + b_y)\hat{\jmath} + (a_z + b_z)\hat{k}, \end{aligned}$$

quindi il vettore somma avra' le seguenti componenti

$$c_x = a_x + b_x, \qquad c_y = a_y + b_y, \qquad c_z = a_z + b_z,$$

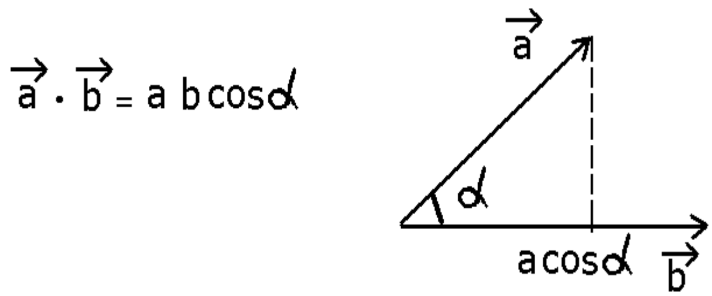
e modulo pari a

$$c = \sqrt{(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2 + (a_z + b_z)^2}.$$

Si definiscono due tipi di prodotto tra due vettori: **prodotto scalare** e **prodotto vettoriale**. Il prodotto scalare da' come risultato **un numero**, il prodotto vettoriale da' come risultato **un vettore**.

PRODOTTO SCALARE $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}$

Il prodotto scalare tra due vettori e' pari al prodotto dei moduli per il coseno dell'angolo compreso tra le loro direzioni



$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = \mathbf{ab} \cos\theta$$

IMPORTANTE

Se i due vettori sono **ORTOGONALI** $\theta = 90^o$ e il prodotto scalare **e' zero**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Se i due vettori sono **PARALLELI** $\theta = 0^o$ e il prodotto scalare **e' massimo,** e pari al prodotto dei moduli

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab.$$

PROPRIETA' DEL PRODOTTO SCALARE

Il prodotto scalare gode della **proprieta' distributiva**

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c},$$

e della **proprieta' commutativa**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

Siccome i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ si possono scrivere come combinazione dei versori di base

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} \qquad \text{e} \qquad \vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k},$$

applicando la proprieta' distributiva del prodotto scalare, troviamo

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} &= (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) \cdot (b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}) \\
&= a_x\hat{i} \cdot b_x\hat{i} + a_x\hat{i} \cdot b_y\hat{j} + a_x\hat{i} \cdot b_z\hat{k} \\
&+ a_y\hat{j} \cdot b_x\hat{i} + a_y\hat{j} \cdot b_y\hat{j} + a_y\hat{j} \cdot b_z\hat{k} \\
&+ a_z\hat{k} \cdot b_x\hat{i} + a_z\hat{k} \cdot b_y\hat{j} + a_z\hat{k} \cdot b_z\hat{k} \\
&= \mathbf{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}
\end{aligned}$$

Nell'ottenere il risultato precedente abbiamo sfruttato il fatto che i versori sono ortogonali tra loro, quindi per es. $\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$, e che, siccome hanno modulo unitario, $\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$. RIASSUMENDO, il prodotto scalare si calcola cosi': se conosciamo il modulo dei due vettori e l'angolo tra di essi

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = \mathbf{ab} \cos\theta \tag{1}$$

se invece conosciamo le componenti dei due vettori facciamo la somma dei prodotti delle componenti corrispondenti

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = \mathbf{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z} \tag{2}$$

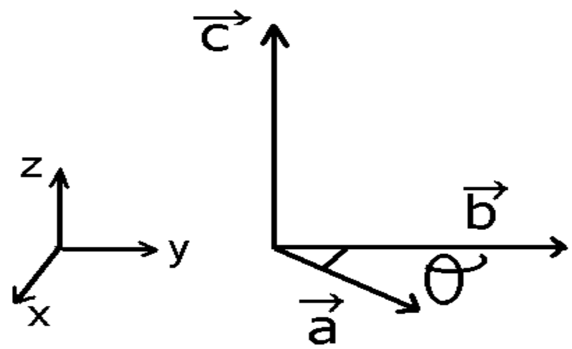
La (1) e la (2) sono del tutto equivalenti.

PRODOTTO VETTORIALE $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$

Il risultato del prodotto vettoriale tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e' un **vettore** $\vec{c}$ che ha direzione **ortogonale** al piano individuato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$, modulo pari a

$$c = ab \sin\theta,$$

dove θ e' l'angolo compreso tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$.



Il verso di $\vec{c}$ si puo' trovare in diversi modi che elenchiamo qui sotto

- il verso di $\vec{c}$ coincide con quello dell'asse z di una terna cartesiana orientata, in cui il piano x-y coincide con quello individuato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$.
- il verso di $\vec{c}$ si puo' trovare con la regola della mano destra: facciamo coincidere l'indice della mano destra con $\vec{a}$ e il medio con $\vec{b}$; $\vec{c}$ sara' diretto come il pollice.
- regola della vite: il vettore $\vec{c}$ e' diretto nel verso in cui si avvita una vite che vede il vettore $\vec{a}$ ruotare sul vettore $\vec{b}$.

IMPORTANTE

Se i due vettori sono **PARALLELI** $\theta = 0^o$ e il prodotto vettoriale $\vec{a} \times \vec{b} = ab \sin\theta$ **e' zero**

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0.$$

Se i due vettori sono **ORTOGONALI** $\theta = 90^0$ e il prodotto vettoriale **e' massimo** e pari al prodotto dei moduli

$$\vec{a} \times \vec{b} = ab.$$

Infine, se sono note le componenti di $\vec{a}$ e $\vec{b}$, le componenti del vettore $\vec{c}$ si trovano calcolando il seguente "determinante"

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \hat{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \hat{k}(a_x b_y - a_y b_x).$$

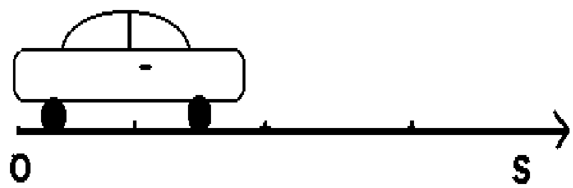
IMPORTANTE

Il prodotto vettoriale **e' ANTICOMMUTATIVO**, cioe'

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

COME DESCRIVIAMO IL MOTO DEI CORPI.

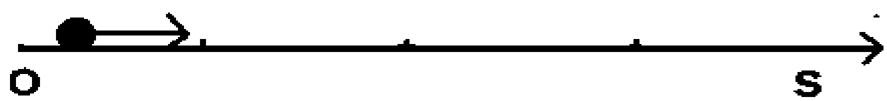
Innanzi tutto **MOTO RISPETTO A CHE COSA?** Dobbiamo fissare un sistema di riferimento. Consideriamo per iniziare il caso semplice di moto a una sola dimensione. ESEMPIO: un'automobile che si muove su una strada rettilinea. Per definire la posizione dell'automobile dovro' ovviamente aver fissato un'origine e un'unita' di misura della lunghezza.

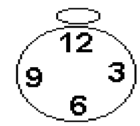


L'auto e' un corpo esteso, per definirne la posizione dovrei specificare quella del cofano, delle ruote, e di qualsiasi altra parte. Dato che voglio considerarne il moto nel suo insieme, ricorro a una semplificazione:
assumo che l'auto sia un **PUNTO MATERIALE**, cui assegno, a ogni istante di tempo, la posizione.
IMPORTANTE: se voglio studiare il moto dei corpi, non basta un riferimento spaziale, mi serve anche un riferimento temporale, cioe' devo fissare un'origine per il tempo e un'unita' di misura.

Le tre grandezze fisiche che descrivono il moto di un punto materiale sono **la posizione, la velocita' e l'accelerazione rispetto al riferimento scelto.**
Queste tre grandezze sono rappresentate da vettori, quindi in generale sono grandezze vettoriali, pero' se il moto avviene in una sola dimensione, come stiamo inizialmente supponendo, la direzione e' fissata, e quindi per descriverle basta un numero, il cui segno ci dira' in che verso si sta andando. Questo lo capiremo meglio in seguito. Diamo ora le definizioni dei concetti piu' semplici.

Supponiamo che un'auto si muova lungo una strada rettilinea e che la sua posizione **s** sia tabulata in funzione del tempo **t**





t in secondi	0	10	30	40	60
s in metri	0	50	60	90	50

Ci chiediamo: quand'e' che l'auto e' andata piu' veloce? Per rispondere alla domanda dobbiamo calcolare la **velocita' media**

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} \equiv \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

intervallo di tempo	0-10	10-30	30-40	40-60
$\bar{\mathbf{v}}$ **in metri/secondo**	5	0.5	3	-2

NOTARE CHE

- La maggiore velocita' media viene raggiunta nell'intervallo di tempo che va da 0 a 10 secondi
- Nell'ultimo intervallo (da 40 a 60 secondi) la velocita' media cambia segno, cioe' l'automobile torna indietro, come si vede anche dalla tabella della posizione.

In un dato intervallo Δt il punto puo' essere andato piu' o meno veloce. Per sapere qual e' la **velocita' istantanea** dobbiamo rendere piccolissimo Δt,

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} \equiv \frac{ds}{dt},$$

quindi la **velocita' istantanea** e' la derivata dello spazio rispetto al tempo.

DIMENSIONI DELLA VELOCITA'

Le **dimensioni** di una grandezza fisica si esprimono in funzione delle grandezze fondamentali e si possono ricavare a partire dalla sua definizione. Per ora ci occorrono solo **lunghezza, tempo e massa**

$$v = \frac{ds}{dt},$$

quindi

$$[v] = \left[\frac{ds}{dt}\right] = \mathbf{lt^{-1}},$$

Le parentesi quadre indicano che stiamo calcolando le dimensioni della grandezza inclusa, cioe' la stiamo esprimendo in funzione delle grandezze fondamentali **l, t, m**.

La velocita' ha le dimensioni di una lunghezza per un tempo alla meno uno, lt^{-1}

UNITA' DI MISURA

Le unita' di misura si ricavano corrispondentemente. Siccome l'unita' di lunghezza e' il metro **m**, e l'unita' di tempo e' il secondo **s**, l'unita' di misura della velocita' sara'

$$\mathbf{ms^{-1}}.$$

Spesso si usa esprimere la velocita' in chilometri all'ora. Il passaggio tra le due unita' di misura si fa cosi'.

$$1\ km = 10^3\ m \qquad \rightarrow \qquad 1\ m = 10^{-3}\ km$$
$$1\ h = 3600\ s \qquad \rightarrow \qquad 1\ s = \frac{1}{3600}\ h$$

quindi

$$1\ \frac{m}{s} = \frac{10^{-3}\ km}{\frac{1}{3600}\ h} = 3.6\ km/h \quad \rightarrow \quad \mathbf{1\ \frac{m}{s} = 3.6\ km/h}.$$

Per esempio

$$30\ m/s = 30 \cdot 3.6\ km/h = 108\ km/h.$$

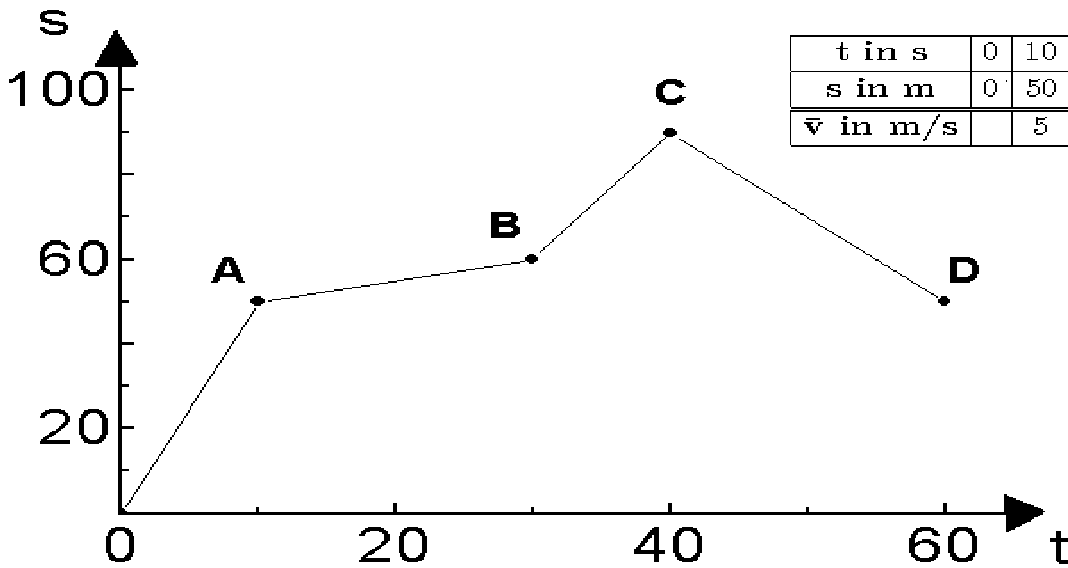
Analogamente

$$1\ \frac{km}{h} = \frac{10^3\ m}{3600\ s} = \frac{1}{3.6}\ m/s \quad \rightarrow \quad \mathbf{1\ \frac{km}{h} = \frac{1}{3.6}\ m/s}$$

quindi, per esempio,

$$20\ km/h = \frac{20}{3.6}\ m/s = 5.6\ m/s.$$

Grafichiamo ora la posizione del punto materiale in funzione del tempo



t in s	0	10	30	40	60
s in m	0	50	60	90	50
$\bar{v}$ in m/s		5	0.5	3	-2

Si vede che i segmenti di cui e' composta la curva $s(t)$ hanno una pendenza maggiore nel tratto OA in cui la velocita' media e' maggiore, e ha pendenza negativa nel tratto CD in cui la velocita' media e' negativa e il punto materiale torna indietro.
Finora abbiamo individuato la posizione del punto materiale attraverso una tabella. Tuttavia possiamo essere nelle condizioni di conoscere la sua **EQUAZIONE ORARIA, cioe' l'equazione che da' la posizione in funzione del tempo**.
Per esempio un punto materiale si puo' muovere di moto **rettilineo** (ricordiamo che stiamo sempre studiando il moto in una sola dimensione), con la seguente legge oraria

$$s(t) = 2t + 1$$

Oppure

$$s(t) = -t^2 + 3t + 2$$

o ancora

$$s(t) = 3\sin(t) + 5\cos(t), \qquad \text{etc. etc.}$$

Notiamo per inciso che l'espressione della legge oraria, che abbiamo scritto nella forma:

$$s(t) = 2t + 1$$

e' corretta dal punto di vista dimensionale solo se "2" non e' un numero puro, ma ha le dimensioni di una velocita', e "1" ha le dimensioni di una lunghezza. In tal caso infatti, passando alle unita' di misura, troviamo

$$s(t) = (2\ m/s) \times t(s) + 1\ m,$$

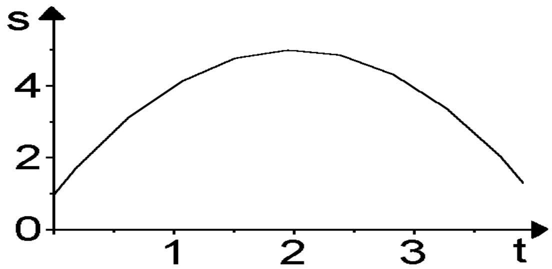
che da' correttamente il risultato in metri. Analogamente, quando scriviamo

$$s(t) = -t^2 + 3t + 2$$

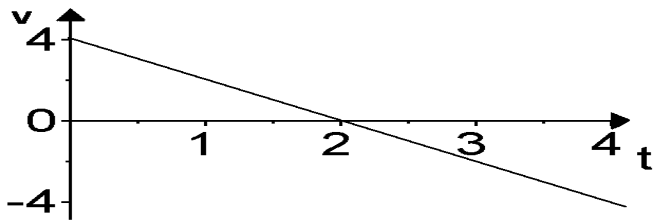
sottintendiamo che

$$s(t) = -(1\ m/s^2) \times t^2(s^2) + (3\ m/s) \times t(s) + 2\ m$$

Come esempio, rappresentiamo graficamente l'equazione oraria $\mathbf{s(t) = -t^2 + 4t + 1}$



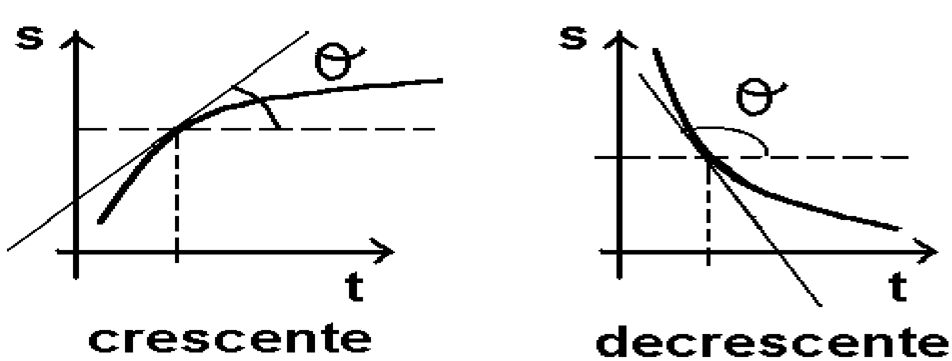
Dato che ora conosciamo la posizione a ogni istante di tempo, possiamo calcolare, e graficare, la velocita' istantanea $\mathbf{v = \dfrac{ds}{dt} = -2t + 4}$.



Confrontando i due grafici, si vede che

- per $0 \leq t < 2$ la curva $s(t)$ **cresce** e $\vec{\mathbf{v}}$ e' positiva
- per $t = 2$ $s(t)$ **ha un massimo** e $\vec{\mathbf{v}}$ diventa zero
- per $2 < t < 4$ $s(t)$ **decresce** e $\vec{\mathbf{v}}$ e' negativa

PERCHE'? **la derivata di una curva in un punto e' la tangente dell'angolo che la retta tangente alla curva in quel punto forma con l'asse delle ascisse** $\tan\theta \equiv \frac{\mathbf{ds}}{\mathbf{dt}}$: **se** $s(t)$ **cresce,** $0 < \theta < 90^o \rightarrow \tan\theta > 0 \rightarrow v > 0$. **Se** $s(t)$ **decresce,** $90^o < \theta < 180^o \rightarrow \tan\theta < 0 \rightarrow v < 0$.



PROBLEMA INVERSO: COME TROVARE L'EQUAZIONE ORARIA s(t), SE CONOSCIAMO L'ESPRESSIONE DELLA VELOCITA' IN FUNZIONE DEL TEMPO?

Sappiamo che

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \rightarrow \quad ds = vdt$$

Per cui integrando tra un certo istante iniziale t_0 e un istante finale t, e tra le corrispondenti posizioni del punto materiale $s(t_0)$ e $s(t)$ si trova

$$\int_{s(t_0)}^{s(t)} ds = \int_{t_0}^{t} vdt \quad \rightarrow \quad s(t) - s(t_0) = \int_{t_0}^{t} vdt$$

Quindi infine

$$s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^{t} vdt \tag{3}$$

Per trovare l'espressione esplicita di $s(t)$ ci occorre quindi

- conoscere la posizione iniziale del punto, cioe' $s(t_0)$
- eseguire l'integrale nell'eq. (3), sostituendo a $v(t)$ la sua espressione esplicita.

ESEMPIO. Supponiamo che il punto materiale all'istante $t_0 = 0$ sia in $s = 3$ e che l'equazione della sua velocita' sia $v = 3t+4$

Sostituendo nella (3) si trova

$$s(t) = 3 + \int_0^t (3t+4)dt \quad \rightarrow \quad s(t) = 3 + \frac{3}{2}t^2 + 4t$$

ALTRO ESEMPIO. A $t_0 = 1$ il punto si trova in $s = 2$, e si muove con $v = t^3 + 4t$.

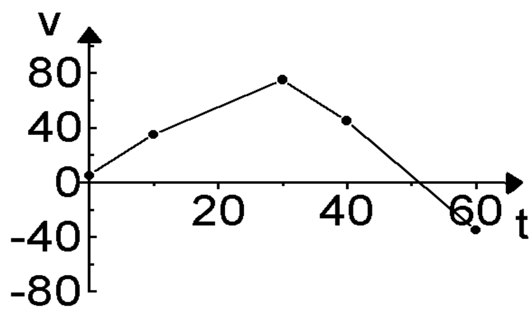
$$\begin{aligned} s(t) &= 2 + \int_1^t (t^3 + 4t)dt = 2 + [\frac{1}{4}t^4 + 4(\frac{1}{2}t^2)]_1^t \\ &= 2 + \frac{1}{4}t^4 + 2t^2 - \frac{1}{4} - 2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}t^4 + 2t^2. \end{aligned}$$

ACCELERAZIONE

Supponiamo che un'auto si muova lungo una strada rettilinea e che la sua velocita' **v** sia tabulata in funzione del tempo **t**

t in secondi	0	10	30	40	60
v in metri/secondo	5	35	75	45	-35

Grafichiamo la velocita' in funzione del tempo



Per sapere quanto rapidamente e' cambiata la velocita', possiamo definire l' **accelerazione media**

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \equiv \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

Negli intervalli

- **0-10 s** la macchina accelera con $\bar{a} = \frac{35-5}{10} = 3\ m/s^2$
- **10-30 s** la macchina accelera con $\bar{a} = \frac{75-35}{20} = 2\ m/s^2$
- **30-40 s** la macchina **decelera** con $\bar{a} = \frac{45-75}{10} = -3\ m/s^2$

- **40-60 s** la macchina continua a decelerare, tanto che la velocita' diventa negativa, cioe' la macchina inverte il verso di marcia $\bar{a} = \frac{-35-45}{20} = -4\ m/s^2$

Come avevamo fatto per la velocita', possiamo definire la

accelerazione istantanea

rendendo piccolissimo l'intervallo di tempo Δt, tra i due istanti in cui misuriamo la velocita', cioe'

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \equiv \frac{dv}{dt},$$

quindi l' **accelerazione istantanea e' la derivata della velocita' rispetto al tempo**.

Essendo la velocita' la derivata dello spazio rispetto al tempo $\mathbf{v} = \frac{ds}{dt}$, possiamo anche dire che **l'accelerazione e' la derivata seconda dello spazio rispetto al tempo**

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 s}{dt^2},$$

ESEMPIO Supponiamo che il punto materiale si muova di moto rettilineo con equazione oraria $s = 3 - 2t^2 + 4t^3$. Calcolare la posizione iniziale, e la velocita' e l'accelerazione al tempo $t = 2\ s$.

posizione iniziale

Quando t=0 s, s=3 m.

velocita'

$$v = \frac{ds}{dt} = -4t + 12t^2,$$

per cui quando t=2 s $v = -4 \cdot 2 + 12 \cdot 4 = 40\ m/s.$

accelerazione

$$a = \frac{dv}{dt} = -4 + 24t,$$

per cui quando t=2 s $v = -4 + 24 \times 2 = 44\ m/s^2.$

DIMENSIONI E UNITA' DI MISURA DELL'ACCELERAZIONE

Dalla definizione di accelerazione

$$a = \frac{dv}{dt},$$

e ricordando che

$$[\mathbf{v}] = \mathbf{lt^{-1}},$$

troviamo subito che

$$[\mathbf{a}] = \left[\frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dt}}\right] = \frac{\mathbf{lt^{-1}}}{\mathbf{t}} = \mathbf{lt^{-2}},$$

Ricordiamo che le parentesi quadre indicano che stiamo calcolando le dimensioni della grandezza inclusa, cioe' la stiamo esprimendo in funzione delle grandezze fondamentali **l, t, m**. (REPETITA IUVANT!!!)

L'accelerazione ha le dimensioni di una lunghezza fratto un tempo al quadrato, lt^{-2}

Le unita' di misura quindi saranno

$$\mathbf{ms^{-2}}.$$

PROBLEMA INVERSO: TROVARE LA VELOCITA' A PARTIRE DALL'ACCELERAZIONE

Sappiamo che

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \rightarrow \quad dv = adt$$

Per cui integrando tra un certo istante iniziale t_0 e un istante finale t, e tra i valori che la velocita' del punto materiale ha in quegli istanti $v(t_0)$ e $v(t)$ si trova

$$\int_{v(t_0)}^{v(t)} dv = \int_{t_0}^{t} adt \quad \rightarrow \quad v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t} adt$$

Quindi infine

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} adt \tag{4}$$

Per trovare l'espressione esplicita di $v(t)$ occorre quindi

- conoscere il valore della velocita' iniziale del punto, cioe' $v(t_0)$
- eseguire l'integrale nell'eq. (4), sostituendo ad $a(t)$ la sua espressione esplicita.

ESEMPIO Supponiamo che il punto materiale all'istante $t_0 = 0$ abbia velocita' pari a $v(t_0) = 3\ m/s$ e che l'equazione dell'accelerazione sia $a(t) = 2t^2 + t$. Trovare l'accelerazione al tempo $t = 5\ s$. Sostituendo nella (4) l'espressione di $a(t)$ si trova

$$v(t) = 3 + \int_0^t (2t^2 + t)dt \quad \rightarrow \quad v(t) = 3 + 2 \cdot \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2$$

A $t = 5\ s$

$$v(5) = 3 + \frac{2}{3}(5)^3 + \frac{1}{2}(5)^2 = 98.8\ m/s$$

CASI PARTICOLARI DI MOTO IN UNA DIMENSIONE

- si dice **moto rettilineo uniforme** un moto che si svolge su una traiettoria rettilinea con **velocita' costante**.

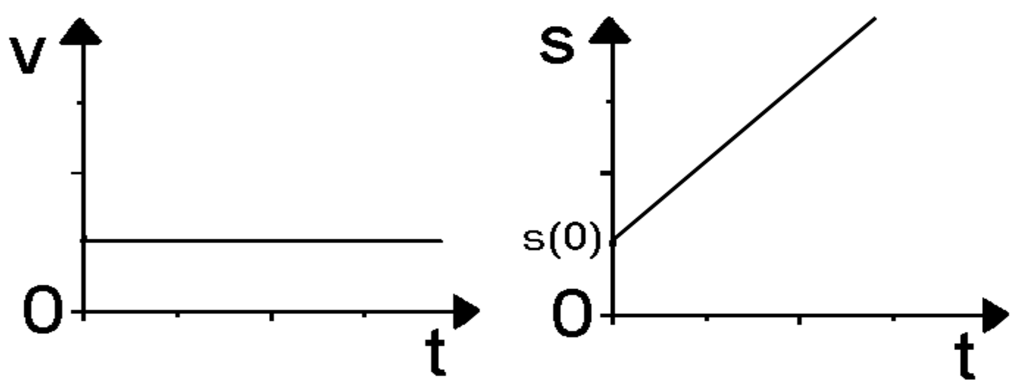
$$v = \frac{ds}{dt} \;\rightarrow\; ds = vdt \;\rightarrow\; \int_{s(t_0)}^{s(t)} ds = \int_{t_0}^{t} vdt$$

Dato che la velocita' e' costante, ponendo $t_0 = 0$ si ha:

$$\int_{t_0}^{t} vdt = vt \quad \rightarrow \quad s(t) = s(0) + vt$$

Le equazioni che descrivono il moto rettilineo uniforme dunque sono

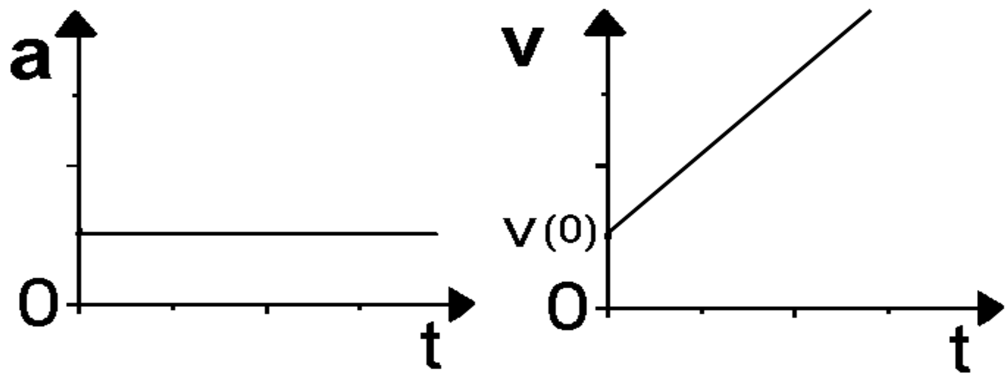
$$a = 0, \qquad v = costante, \qquad s(t) = s(0) + vt$$



- si dice **moto uniformemente accelerato** un moto che si svolge su una traiettoria rettilinea con **accelerazione costante**. Troviamo prima l'espressione della velocita';

$$a = \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = adt \rightarrow \int_{v(t_0)}^{v(t)} dv = \int_{t_0}^{t} adt \rightarrow v(t) = v(t_0) + at$$

quindi la velocita' varia linearmente nel tempo



Calcoliamo ora lo spostamento

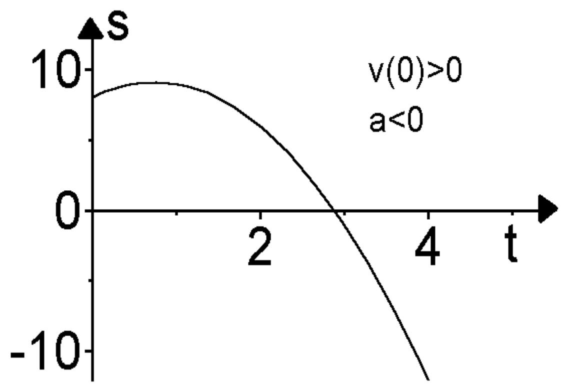
$$\int_{s(t_0)}^{s(t)} ds = \int_{t_0}^{t} v dt \rightarrow s(t) - s(t_0) = \int_{t_0}^{t} [v(t_0) + at] \, dt$$
$$= \left[v(t_0)t + \frac{1}{2}at^2 \right]_{t_0}^{t} = v(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t^2 - t_0^2)$$

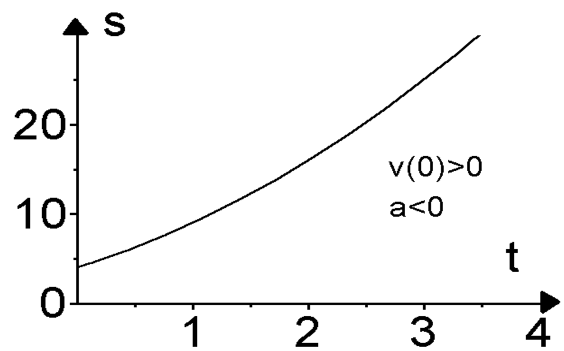
quindi

$$s(t) = s(t_0) + v(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t^2 - t_0^2)$$

Se supponiamo per semplicita' che $t_0 = 0$, l'equazione diventa

$$s(t) = s(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2$$





Le equazioni del moto uniformemente accelerato dunque sono

$$a = costante, \qquad v = v(0) + at, \qquad s(t) = s(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2$$

RIASSUMIAMO:

velocita': $v = \dfrac{ds}{dt}$

Dimensioni $[v] = lt^{-1}$, Unita' di misura m/s

accelerazione: $a = \dfrac{dv}{dt}$ **e quindi** $a = \dfrac{d^2s}{dt^2}$

Dimensioni $[v] = lt^{-2}$, Unita' di misura m/s^2

Se conosco l'equazione oraria, per esempio

$$s(t) = 4t^4 + 5t - 2,$$

- **derivando una volta trovo la velocita'**

$$v(t) = \tfrac{ds}{dt} = 16t^3 + 5,$$

- **derivando ancora trovo l'accelerazione**

$$a(t) = \tfrac{dv}{dt} = 48t^2.$$

Se conosco l'accelerazione, per esempio

$$a(t) = \tfrac{dv}{dt} = 4t + 2,$$

- **integrando una volta trovo la velocita'**

$$\int_{v(0)}^{v(t)} dv = \int_0^t adt \;\rightarrow\; v(t)-v(0) = \int_0^t [4t+2]dt \;\rightarrow\; v(t) = v(0)+2t^2+2t$$

Pero' devo conoscere la velocita' iniziale $v(0)$!!!

- **integrando ancora trovo l'equazione oraria**

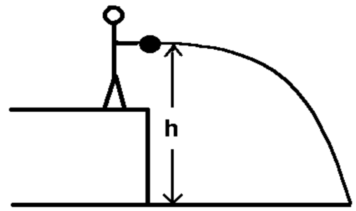
$$\int_{s(0)}^{s(t)} ds = \int_0^t vdt \;\rightarrow\; s(t) - s(0) = \int_0^t [v(0) + 2t^2 + 2t]dt$$

$$s(t) = s(0) + v(0)t + \frac{2}{3}t^3 + t^2$$

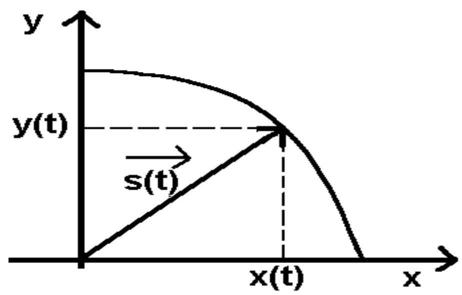
Pero' devo conoscere la posizione iniziale $s(0)$!!!

MOTO IN DUE DIMENSIONI

Supponiamo di voler descrivere il moto di una palla che viene lanciata da un'altezza h come in figura



Il moto non e' rettilineo, ma avviene su un piano. Per descriverlo devo fissare un sistema di riferimento **{xy}**, e definire a ogni istante di tempo la posizione della palla nel piano



cioe' devo misurare le coordinate $x(t)$ e $y(t)$, che altro non sono che le componenti del vettore $\vec{s}(t)$ che unisce l'origine del riferimento con la palla e che, ovviamente, varia in funzione del tempo. **Quindi** il moto di un punto materiale che si muove in un piano, e' descritto da un **VETTORE POSIZIONE**

$$\vec{s}(t) = (x(t), y(t)) \;\; \rightarrow \;\; \vec{s}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j},$$

dove ricordiamo che $\hat{i}$ e $\hat{j}$ sono i versori degli assi coordinati Le componenti di $\vec{s(t)}$ forniscono le due equazioni orarie del moto.

La curva che il punto descrive nello spazio si dice

TRAIETTORIA

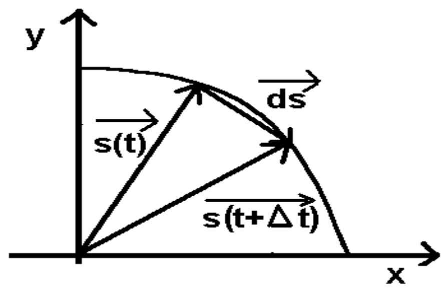
Con che velocita' si muove la palla?

Nel caso di moto rettilineo per definire la velocita' bastava un numero, ora vorremo sapere anche qual e' la sua direzione e il suo verso: in altre parole **la velocita' e' un vettore**.

Generalizzando la definizione data nel caso unidimensionale:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{s}(t+\Delta t) - \vec{s}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{s}}{dt},$$

cioe' **la velocita' e' la derivata del vettore posizione rispetto al tempo**. Il vettore $d\vec{s}$ (**vettore spostamento**) e' la differenza tra $\vec{s}(t+\Delta t)$ e $\vec{s}(t)$, ed e' tangente alla traiettoria, come indicato in figura (ricordare la regola del parallelogramma)



siccome $\vec{v}$ ha la stessa direzione di $d\vec{s}$, concludiamo che **la velocita' e' sempre tangente alla traiettoria**.

Componenti della velocita'

$\vec{s}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$, quindi, per la proprieta' della derivata di un prodotto

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\hat{i} + x(t)\frac{d\hat{i}}{dt} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{j} + y(t)\frac{d\hat{j}}{dt};$$

Essendo $\hat{i}$ e $\hat{j}$ vettori costanti, la loro derivata e' zero, quindi

$$\vec{v} = \frac{dx(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{j}$$

quindi le componenti di $\vec{v}$ sono le derivate delle componenti di $\vec{s}$:

$$\vec{v} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}\right)$$

Accelerazione

Come la velocita', anche l'accelerazione di un corpo che si muove nel piano (o nello spazio) **E' UN VETTORE**.
La definiamo, in analogia con quanto fatto per il moto rettilineo, come

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

cioe' **l'accelerazione e' la derivata della velocita' rispetto al tempo**.

Componenti dell'accelerazione

essendo $\quad \vec{v}(t) = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j},$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y(t)}{dt}\hat{j}$$

(ricordare che la derivata dei vettori di base e' nulla). Quindi le componenti di $\vec{a}$ sono le derivate delle componenti di $\vec{v}$:

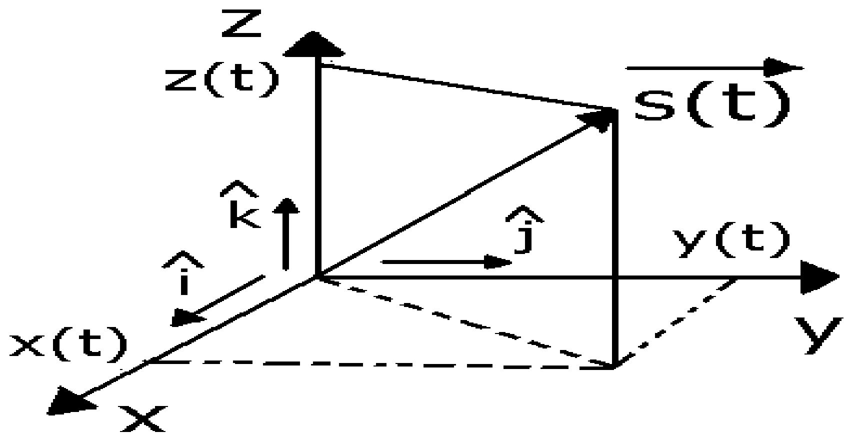
$$\vec{a} = \left(\frac{dv_x(t)}{dt}, \frac{dv_y(t)}{dt} \right)$$

MOTO NELLO SPAZIO

E' immediato generalizzare la descrizione del moto di un punto materiale nello spazio. In questo caso fisseremo un sistema di coordinate tridimensionale **{xyz}**, e definiremo a ogni istante t la posizione del punto assegnando il vettore posizione $\vec{s}(t)$

$$\vec{s}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k},$$

dove $\hat{k}$ e' il versore dell'asse z.



La velocita' del punto materiale sara'

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{j} + \frac{dz(t)}{dt}\hat{j}$$

ed **e' sempre tangente alla traiettoria, cioe' alla curva che il punto descrive nello spazio**.

Le componenti della velocita' dunque sono $\vec{v} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}\right)$.

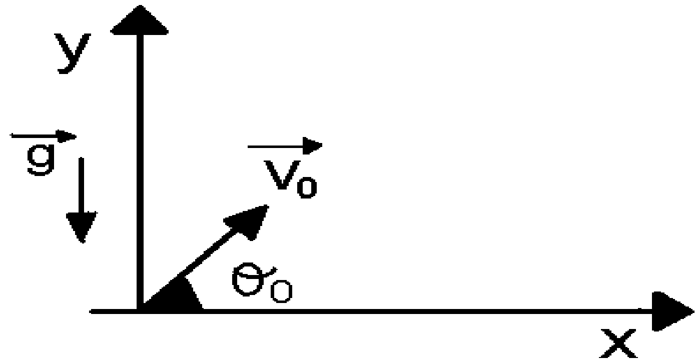
Analogamente l'accelerazione e'

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y(t)}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z(t)}{dt}\hat{k},$$

e le sue componenti sono $\vec{a} = \left(\frac{dv_x(t)}{dt}, \frac{dv_y(t)}{dt}, \frac{dv_z(t)}{dt}\right)$.

MOTO DI UN PROIETTILE.

Determinare la **traiettoria**, la **gittata**, la **durata** del tiro, l'**altezza massima** raggiunta da un proiettile lanciato dall'origine del riferimento con una **velocita' iniziale** $v_0 = 400\ m/s$, inclinata di 45^o rispetto all'orizzontale.



Condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} v_x(0) = v_0\ cos\theta_0 \\ v_y(0) = v_0\ sen\theta_0 \end{cases}$$

Il proiettile e' soggetto all'accelerazione di gravita' $\vec{g}$ $(g = 9.8\, m/s^2)$, diretta verticalmente verso il basso

$$\begin{cases} a_x(0) = 0 \\ a_y(0) = -g \end{cases}.$$

Integriamo una prima volta per trovare la velocita'.

Sull'asse x: dato che $a_x = 0$, la componente x della velocita' rimane immutata

$$a_x dt = dv_x \ \rightarrow\ dv_x = 0 \ \rightarrow\ v_x(t) = cost = v_x(0).$$

Sull'asse y (ricordare che $\vec{g}$ e' costante):

$$a_y dt = dv_y, \quad \int_0^t -g dt = \int_{v_y(0)}^{v_y(t)} dv_y \ \rightarrow\ -gt = v_y(t) - v_y(0)$$

$$v_y(t) = v_y(0) - gt$$

Integriamo ora le equazioni della velocita' per trovare le equazioni orarie.

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0\ cos\theta_0 \\ v_y(t) = v_0\ sen\theta_0 - gt \end{cases}$$

Sull'asse x:

$$v_x dt = dx, \quad \int_0^t v_0\ cos\theta_0 dt = \int_{x(0)}^{x(t)} dx\ \rightarrow\ v_0\ cos\theta_0\ t = x(t) - x(0)$$

e poiche' $x(0) = 0$

$$x(t) = v_0\ cos\theta_0 t$$

quindi il moto sull'asse x e' un moto uniforme

Sull'asse y:

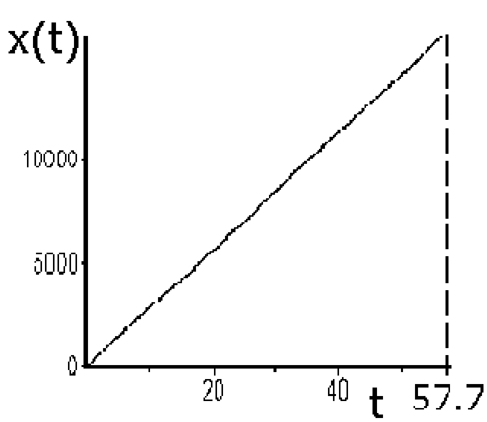
$$v_y dt = dy, \quad \int_0^t (v_0\ sen\theta_0 - gt)\, dt = \int_{y(0)}^{y(t)} dy$$

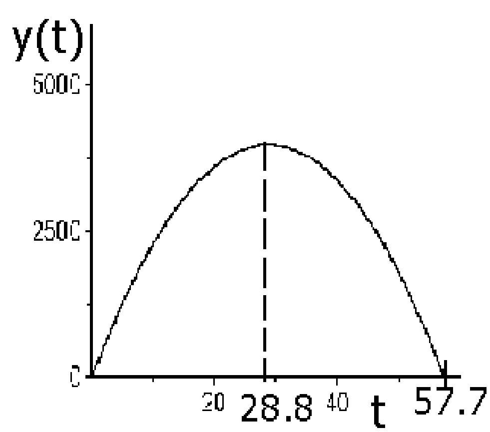
quindi, essendo $y(0) = 0$,

$$y(t) = v_0\ sen\theta_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Il moto sull'asse y e' uniformemente accelerato. In conclusione

$$\begin{cases} x(t) = v_0\ cos\theta_0\ t \\ y(t) = v_0\ sen\theta_0\ t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$





TRAIETTORIA

$$\begin{cases} x(t) = v_0\ cos\theta_0\ t \\ y(t) = v_0\ sen\theta_0\ t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Per trovare la traiettoria bisogna eliminare t dalle equazioni orarie. Per esempio, possiamo ricavare t dalla prima

$$t = \frac{x}{v_0\ cos\theta_0}$$

e sostituirlo nella seconda

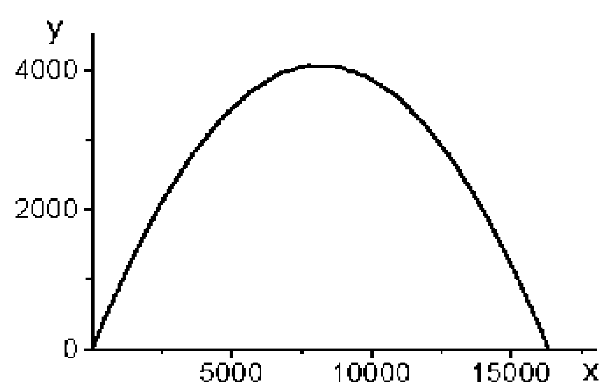
$$y = v_0\ sen\theta_0\ \frac{x}{v_0\ cos\theta_0} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\ cos\theta_0}\right)^2 = x\ tan\theta_0 - \frac{1}{2}\ g\ \frac{x^2}{v_0^2\ cos^2\theta_0}$$

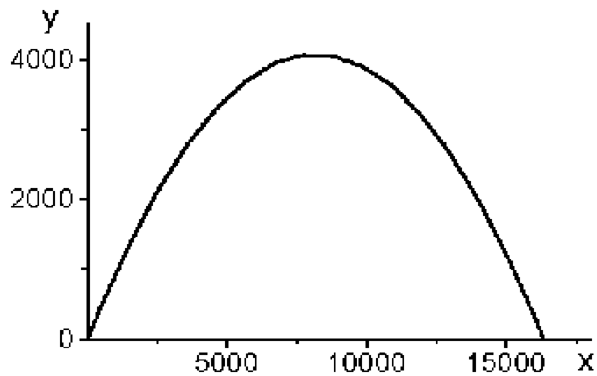
$$y = x\ tan\theta_0 - \frac{1}{2}\ g\ \frac{x^2}{v_0^2\ cos^2\theta_0}$$

LA TRAIETTORIA E' UNA PARABOLA

Nel nostro caso, siccome $\theta_0 = 45^o$, $tan\theta_0 = 1$ e $cos\theta_0 = \sqrt{2}/2 \ \rightarrow\ cos^2\theta_0 = \frac{1}{2}$, quindi l'eq. della traiettoria diventa

$$y = x - g\ \frac{x^2}{v_0^2}$$





LA GITTATA e' la distanza a cui il proiettile tocca terra. Si puo' calcolare in due modi:

1) ponendo $y = 0$ nell'eq. della traiettoria

$$y = x\ tan\theta_0 - \frac{1}{2}\ g\ \frac{x^2}{v_0^2\ cos^2\theta_0} \ \rightarrow\ x\left(tan\theta_0 - \frac{1}{2}\frac{g\ x}{v_0^2\ cos^2\theta_0}\right) = 0$$

le radici sono

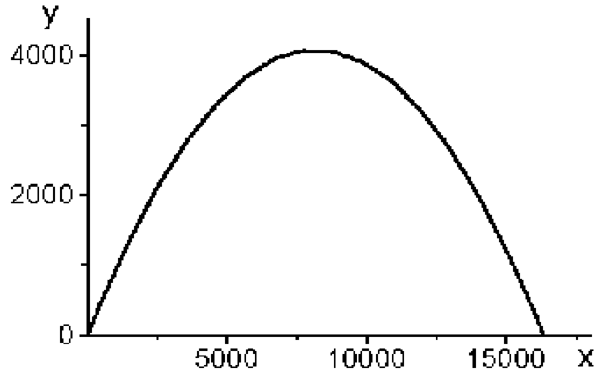
$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 2\ tan\theta_0\ \frac{v_0^2\ cos^2\theta_0}{g} = 2\ sen\theta_0\ cos\theta_0 \frac{v_0^2}{g} \end{cases}$$

Quindi

$$x_G = \frac{v_0^2}{g}\ sen\ (2\theta_0)$$

ed e' massima quando $\mathbf{2\theta_0 = \frac{\pi}{2}\ \rightarrow\ \theta_0 = \frac{\pi}{4}}$,
come e' nel nostro caso. Sostituendo i valori numerici troviamo

$$x_g = \frac{16 \cdot 10^4}{9.8} \simeq 1.63 \cdot 10^4\ m/s.$$



Altro modo per calcolare la gittata

2) ponendo $y = 0$ nell'eq. oraria

$$y(t) = v_0\ sen\theta_0\ t - \frac{1}{2} g t^2 \ \rightarrow\ t\left(v_0\ sen\theta_0 - \frac{1}{2}\ gt\right) = 0$$

si ricava il valore del tempo, t^*, a cui il proiettile tocca terra (durata del tiro)

$$\begin{cases} t = 0 \\ t^* = 2\ \frac{v_0\ \ sin\theta_0}{g} \end{cases}$$

Sostituendo t^* nell'eq. per x, $x(t) = v_0\ cos\theta_0\ t$, troviamo la gittata

$$x(t^*) = x_G = v_0\ cos\theta_0 \cdot 2 \frac{v_0\ \ sin\theta_0}{g} = 2 \frac{v_0^2}{g}\ cos\theta_0\ sin\theta_0 = \frac{v_0^2}{g}\ sen\ (2\theta_0)$$

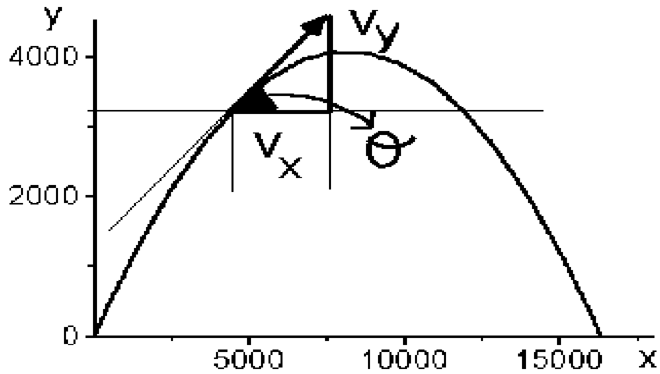
come ottenuto prima.

La **durata del tiro** nel nostro caso e'

$$t^* = 2\ \frac{4 \cdot 10^2\ \frac{\sqrt{2}}{2}}{9.8} = 57.7\ s$$

Che angolo forma la velocita' con l'asse x?

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \; cos\theta_0 \\ v_y(t) = v_0 \; sen\theta_0 - gt \end{cases}$$



Dalla trigonometria sappiamo che

$$v_y = tan\theta \; v_x \;\; \rightarrow \;\; tan\theta = \frac{v_y}{v_x},$$

- A $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{v_0 \; sen\theta_0}}{\mathbf{g}} = \frac{\mathbf{t^*}}{\mathbf{2}}$, $v_y = 0$, quindi $tan\theta = 0$,

cioe', essendo la velocita' sempre tangente alla traiettoria, nel punto di massima altezza e' orizzontale.

- A $\mathbf{t} = \mathbf{2}\frac{\mathbf{v_0 \; sen\theta_0}}{\mathbf{g}} = \mathbf{t^*}$, che e' l'istante in cui il proiettile tocca terra, la componente y della velocita' e' uguale a quella iniziale, ma cambiata di segno

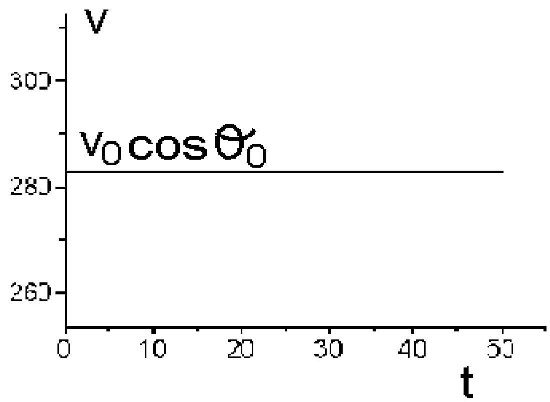
$$v_y = -v_0 \; sen\theta_0$$

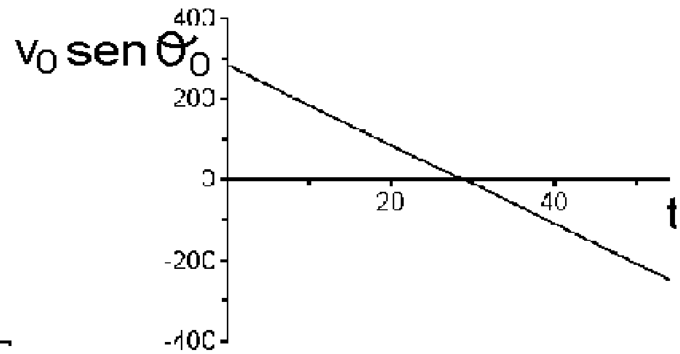
e quindi

$$tan\theta = -tan\theta_0 \quad \rightarrow \quad \theta = -\theta_0$$

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \ cos\theta_0 \\ v_y(t) = v_0 \ sen\theta_0 - gt \end{cases} .$$

Grafichiamo ora le componenti della velocita' in funzione del tempo, ricordando che nel nostro caso $\mathbf{v_0 \ cos\theta_0 = v_0 \ sen\theta_0 = 400\frac{\sqrt{2}}{2} = 282.8 \ m/s}$





La componente x della velocita' rimane costante, la componente y decresce, si annulla a $t = \frac{v_0 \ sen\theta_0}{g}$ e poi diventa negativa.
Calcoliamo il modulo della velocita'

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

- A $\mathbf{t = \frac{v_0 \ sen\theta_0}{g}} = \frac{\mathbf{t^*}}{\mathbf{2}}$, essendo $v_y = 0$,

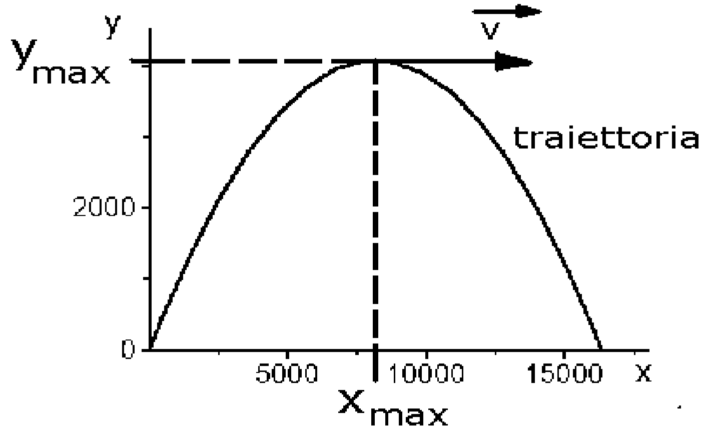
$$v = v_x = v_0 \ cos\theta_0$$

- A $\mathbf{t = 2\frac{v_0 \ sen\theta_0}{g} = t^*}$

$$v_y = v_0 \ sen\theta_0 - g \ 2\frac{v_0 \ sen\theta_0}{g} = -v_0 \ sen\theta_0$$

e quindi il modulo della velocita' e' uguale a quello iniziale

$$v = \sqrt{v_0^2 \ cos^2\theta_0 + v_0^2 \ sen^2\theta_0} = v_0$$



L'ALTEZZA MASSIMA raggiunta dal proiettile si puo' calcolare, per esempio, utilizzando l'equazione della traiettoria

$$y = x\ tan\theta_0 - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2\ cos^2\theta_0}\ x^2.$$

L'ascissa x_{max} si trova calcolando il valore di x a cui $\frac{dy}{dx} = 0$,

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \rightarrow \quad tan\theta_0\ -\ g\ \frac{x}{v_0^2\ cos^2\theta_0} = 0,$$

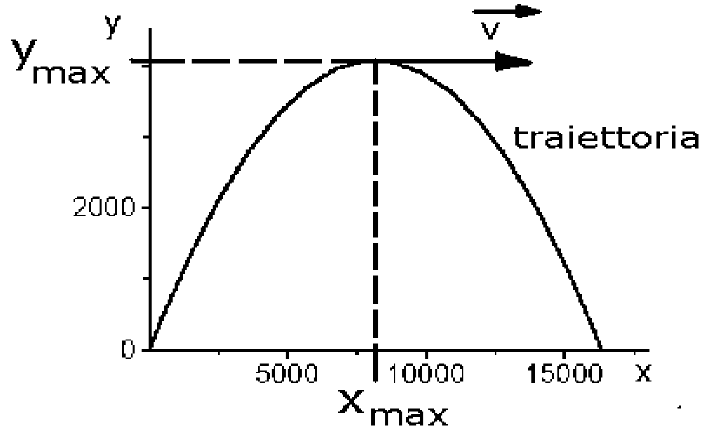
$$x_{max} = \frac{v_0^2\ cos^2\theta_0\ tan\theta_0}{g} = \frac{v_0^2\ sen\theta_0\ cos\theta_0}{g} = \frac{1}{2}\ x_G.$$

Il corrispondente valore di y sara'

$$\begin{aligned} y_{max} &= \frac{v_0^2\ sen\theta_0\ cos\theta_0}{g} \cdot tan\theta_0 - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2\ cos^2\theta_0} \cdot \frac{v_0^4\ sen^2\theta_0\ cos^2\theta_0}{g^2} \\ &= \frac{v_0^2\ sen^2\theta_0}{g} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2\ sen^2\theta_0}{g} \quad \rightarrow\ y_{max} = \frac{v_0^2\ sen^2\theta_0}{2g} \end{aligned}$$

Nel nostro caso ($\theta_0 = 45^o$, $v = 400\ m/s$)

$$y_{max} = \frac{16 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{2}}{2 \cdot 9.8} = 4081.6\ m.$$



Alternativamente y_{max} si puo' trovare calcolando il valore di t a cui la componente y della velocita'

$$v_y(t) = v_0 \; sen\theta_0 - gt$$

diventa zero

$$v_0 \; sen\theta_0 - gt = 0 \quad \rightarrow \quad t = \frac{v_0 \; sen\theta_0}{g},$$

e sostituendo tale valore nell'equazione oraria per y

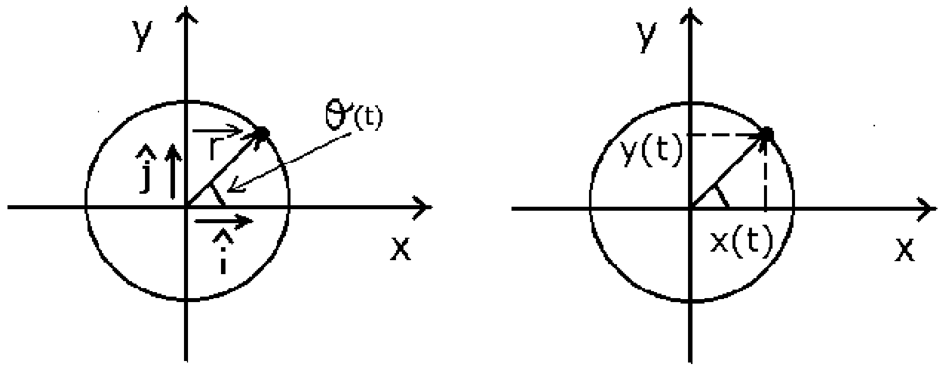
$$y(t) = v_0 \; sen\theta_0 \; t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y_{max} = v_0 \; sen\theta_0 \; \frac{v_0 \; sen\theta_0}{g} - \frac{1}{2}g \cdot \left(\frac{v_0 \; sen\theta_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2 \; sen^2\theta_0}{2g}$$

come trovato in precedenza.

MOTO CIRCOLARE UNIFORME.

Un punto materiale si muove di moto circolare uniforme se la sua traiettoria e' una **circonferenza**, che viene percorsa con velocita' **costante in modulo** e **velocita' angolare costante**



$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} \;\rightarrow\; \begin{cases} x(t) = r\ cos\ \theta(t) \\ y(t) = r\ sen\ \theta(t) \end{cases} ,$$

Definiamo la **velocita' angolare** $\boldsymbol{\omega}$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad [\omega] = [\mathbf{t^{-1}}] \quad \text{unita'} \quad \mathbf{rad/s}$$

se assumiamo ω costante

$$\int_0^{\theta(t)} d\theta = \int_0^t \omega dt \;\rightarrow\; \theta(t) = \omega t,$$

per cui le equazioni orarie diventano

$$\begin{cases} x(t) = r\ cos\ \omega t \\ y(t) = r\ sen\ \omega t \end{cases}$$

derivando una volta troviamo le componenti della **velocita'**

$$\begin{cases} v_x(t) = -r\omega\ sen\ \omega t \\ v_y(t) = r\omega\ cos\ \omega t \end{cases}$$

derivando ancora troviamo l'**accelerazione**

$$\begin{cases} a_x(t) = -r\omega^2\ cos\ \omega t \\ a_y(t) = -r\omega^2\ sen\ \omega t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x(t) = r \cos \omega t} \\ \mathbf{y(t) = r \ sen \ \omega t} \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{v_x(t) = -r\omega \ sen \ \omega t} \\ \mathbf{v_y(t) = r\omega \cos \omega t} \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{a_x(t) = -r\omega^2 \cos \omega t} \\ \mathbf{a_y(t) = -r\omega^2 \ sen \ \omega t} \end{cases}$$

Troviamo la traiettoria quadrando e sommando le eq. orarie

$$x(t)^2 + y(t)^2 = r^2 \left(\ cos \ ^2\omega t + \ sen \ ^2\omega t \right) = r^2$$

$$\mathbf{x(t)^2 + y(t)^2 = r^2}$$

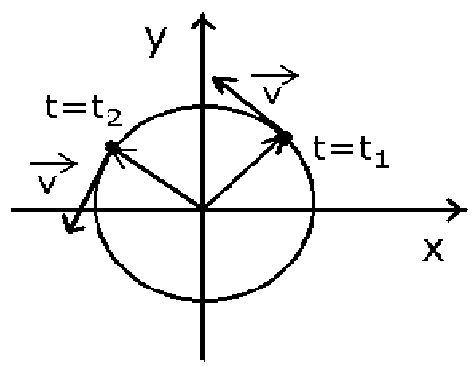
che e' l'equazione della circonferenza, come aspettato.
Calcoliamo il modulo della velocita'

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{r^2\omega^2 \left(\ sen \ ^2\omega t + \ cos \ ^2\omega t \right)} = \omega r$$

quindi

$$\mathbf{v = \omega r}$$

Essendo ω costante, segue che il modulo della velocita' e' **costante**.
ATTENZIONE: la direzione e il verso di $\vec{v}$ **non** sono costanti.



Calcoliamo il modulo dell'accelerazione

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{r^2\omega^4 \left(\ cos \ ^2\omega t + \ sen \ ^2\omega t \right)} = \omega^2 r$$

quindi

$$\mathbf{a = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x(t) = r\ cos\ \omega t} \\ \mathbf{y(t) = r\ sen\ \omega t} \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{v_x(t) = -r\omega\ sen\ \omega t} \\ \mathbf{v_y(t) = r\omega\ cos\ \omega t} \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{a_x(t) = -r\omega^2\ cos\ \omega t} \\ \mathbf{a_y(t) = -r\omega^2\ sen\ \omega t} \end{cases}$$

come sono dirette velocita' e accelerazione?

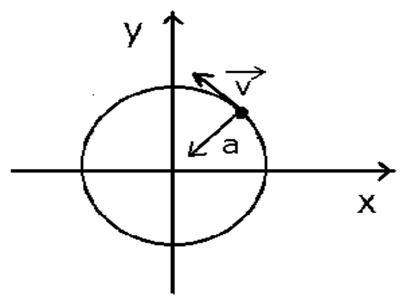
Calcoliamo il prodotto scalare tra $\vec{r}$ e $\vec{v}$ e tra $\vec{a}$ e $\vec{v}$

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = xv_x + yv_y = r\ cos\ \omega t\ (-r\omega\ sen\ \omega t) + r\ sen\ \omega t\ (r\omega\ cos\ \omega t) = 0,$$

cioe', essendo sempre tangente alla traiettoria, la velocita' e' perpendicolare a $\vec{r}$;

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = a_x v_x + a_y v_y = +r^2\omega^3\ cos\ \omega t\ \ sen\ \omega t - r^2\omega^3\ cos\ \omega t\ \ sen\ \omega t = 0,$$

cioe' l'accelerazione e' perpendicolare alla velocita', quindi e' diretta come $\vec{r}$ ma in verso opposto (guardare i segni delle componenti). L'accelerazione e' dunque **centripeta**, ed e' responsabile della **variazione della direzione della velocita'.**



PERIODO

Il periodo $\mathbf{T}$ del moto circolare uniforme e' il tempo impiegato dal punto materiale a fare un giro completo. Abbiamo visto che l'equazione oraria angolare e' $\theta(t) = \omega t$; quando $\theta = 2\pi$, $t = \mathbf{T}$ quindi

$$2\pi = \omega\mathbf{T} \ \rightarrow \ \mathbf{T} = \frac{2\pi}{\omega} \qquad [\mathbf{T}] = [\mathbf{t}] \quad \text{unita'} \quad \mathbf{s}$$

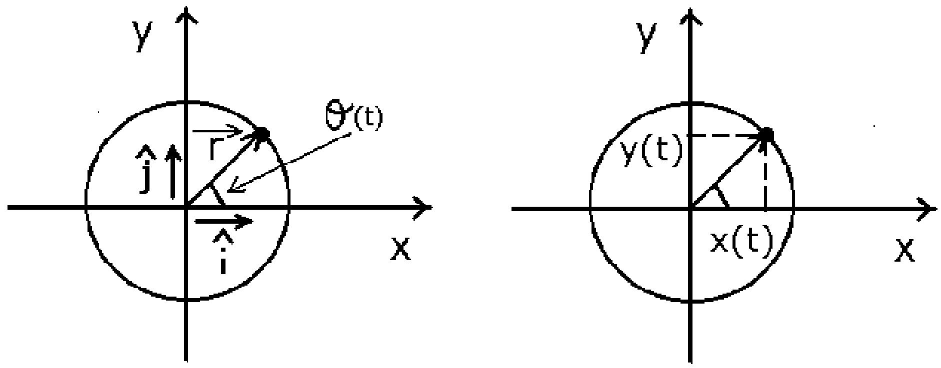
Si definisce **frequenza** del moto circolare uniforme, la grandezza

$$\nu = \frac{1}{\mathbf{T}} \qquad [\nu] = [\mathbf{t^{-1}}] \quad \text{unita'} \quad \mathbf{s^{-1}}$$

MOTO CIRCOLARE NON UNIFORME.

Supponiamo che un punto materiale si muova su una **circonferenza**, ma con velocita' angolare non costante $\boldsymbol{\omega} = 4t$.
Calcoliamo l'equazione oraria angolare

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \;\rightarrow\; \int_0^{\theta(t)} d\theta = \int_0^t 4t dt \;\rightarrow\; \theta(t) = 2t^2,$$



per cui le equazioni orarie diventano

$$\begin{cases} x(t) = r\ cos\ (2t^2) \\ y(t) = r\ sen\ (2t^2) \end{cases}$$

derivando una volta troviamo le componenti della **velocita'**

$$\begin{cases} v_x(t) = r\,[-\ sen\ (2t^2)\ 4t] = -4rt\ sen\ (2t^2) \\ v_y(t) = r\,[\ cos\ (2t^2)\ 4t] = 4rt\ cos\ (2t^2) \end{cases}$$

Calcoliamo il modulo della velocita'

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(16r^2t^2)\,(\ cos\ ^2(2t^2) +\ sen\ ^2(2t^2))} = 4rt = \omega r$$

quindi la velocita' e' sempre uguale a $\boldsymbol{\omega}$**r** , ma non e' piu' costante in modulo. Naturalmente la velocita' e' sempre **tangente alla traiettoria.**

$$\begin{cases} v_x(t) = -4rt\ sen\ (2t^2) \\ v_y(t) = 4rt\ cos\ (2t^2) \end{cases}$$

Derivando le componenti di $\vec{v}$ troviamo quelle dell'**accelerazione**

$$\begin{cases} a_x(t) = -4r\ sen\ (2t^2) - 4rt\ [\ cos\ (2t^2)\ 4t] \\ \quad = -4r\ sen\ (2t^2) - 16rt^2\ cos\ (2t^2) \\ \\ a_y(t) = 4r\ cos\ (2t^2) + 4rt\ [-\ sen\ (2t^2)\ 4t] \\ \quad = 4r\ cos\ (2t^2) - 16rt^2\ sen\ (2t^2) \end{cases}$$

Quindi

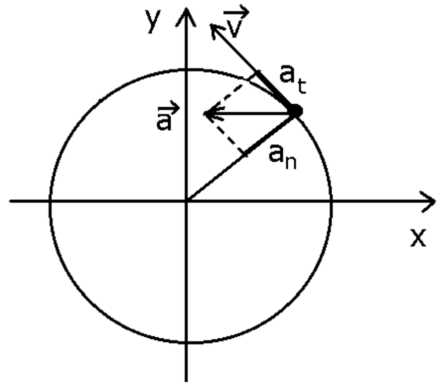
$$\begin{cases} a_x(t) = -4r\ sen\ (2t^2) - 16rt^2\ cos\ (2t^2) \\ \\ a_y(t) = 4r\ cos\ (2t^2) - 16rt^2\ sen\ (2t^2) \end{cases}$$

Vediamo se l'accelerazione e' ancora perpendicolare a $\vec{v}$ come nel caso di moto circolare uniforme

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{v} &= -4rt\ sen\ (2t^2) \left[-4r\ sen\ (2t^2) - 16rt^2\ cos\ (2t^2)\right] \\ &+ 4rt\ cos\ (2t^2) \left[4r\ cos\ (2t^2) - 16rt^2\ sen\ (2t^2)\right] \\ &= 16r^2t\ sen\ ^2(2t^2) + 64r^2t^3\ sen\ (2t^2)\ cos\ (2t^2) \\ &+ 16r^2t\ cos\ ^2(2t^2) - 64r^2t^3\ cos\ (2t^2)\ sen\ (2t^2) = \mathbf{16r^2t} \end{aligned}$$

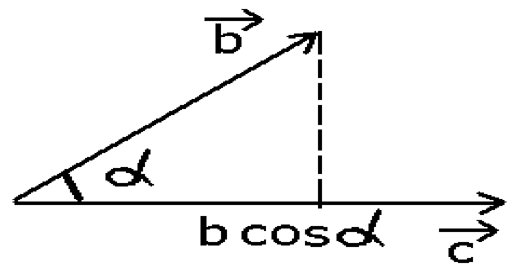
Quindi **se il moto circolare non e' uniforme, accelerazione e velocita' non sono perpendicolari**.

Troviamo le **componenti** dell'accelerazione che sono tangenziali e perpendicolari alla traiettoria.



In generale, dati due vettori $\vec{b}$ e $\vec{c}$, il loro prodotto scalare e' dato da

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = b\, c\, \cos\alpha$$



ma $b\ \cos\ \alpha$ e' la componente del vettore $\vec{b}$ lungo la direzione del vettore $\vec{c}$. Quindi in generale

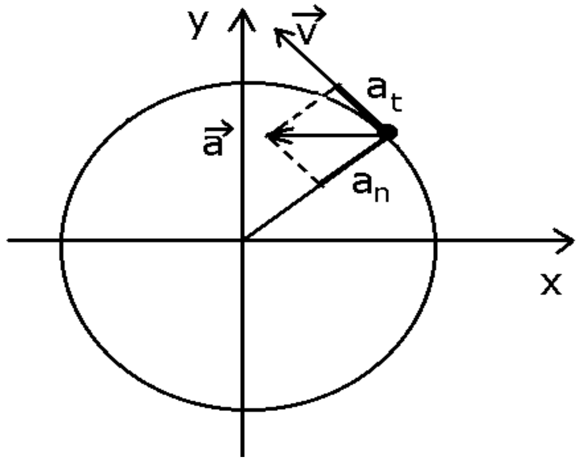
$$\vec{b}\ \cdot\ \vec{c} = [b_{lungo\ c}]\ c\ \rightarrow\ b_{lungo\ c} = \frac{\vec{b}\ \cdot\ \vec{c}}{c}.$$

Quindi per trovare la componente di $\vec{a}$ lungo la direzione del raggio, cioe' **l'accelerazione normale** a_n, dobbiamo calcolare

$$a_{lungo\ r} \equiv \mathbf{a_n} = \frac{\vec{a}\ \cdot\ \vec{r}}{r}.$$

Analogamente, la componente tangenziale dell'accelerazione sara'

$$a_{lungo\ v} \equiv \mathbf{a_t} = \frac{\vec{a}\ \cdot\ \vec{v}}{v}.$$



ricordiamo che

$$\begin{cases} x(t) = r\ cos\ (2t^2) \\ y(t) = r\ sen\ (2t^2) \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x(t) = -4rt\ sen\ (2t^2) \\ v_y(t) = 4rt\ cos\ (2t^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x(t) = -4r\ sen\ (2t^2) - 16rt^2\ cos\ (2t^2) \\ a_y(t) = 4r\ cos\ (2t^2) - 16rt^2\ sen\ (2t^2) \end{cases}$$

sostituendo le componenti dei vettori, e' facile dimostrare che

$$\mathbf{a_n} = \frac{\vec{a}\ \cdot\ \vec{r}}{r} = \frac{1}{r}\left[a_x\ x + a_y\ y\right] = -16rt^2$$

(il segno - indica che $\vec{r}$ e $\vec{a}_n$ hanno verso opposto), e che

$$\mathbf{a_t} = \frac{\vec{a}\ \cdot\ \vec{v}}{v} = \frac{1}{v}\left[a_x\ v_x + a_y\ v_y\right] = \frac{1}{4rt}\left[16r^2t\right] = 4r$$

Osserviamo che, siccome $\omega = 4t$,

$$\mathbf{a_n} = \boldsymbol{\omega^2}\mathbf{r}$$

che e' la stessa formula del moto circolare, con la differenza che ora ω e' variabile.

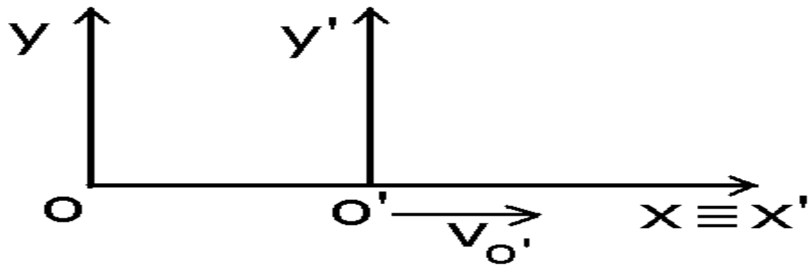
In conclusione

$\mathbf{a_n}$ e' responsabile della variazione della **direzione** della velocita'

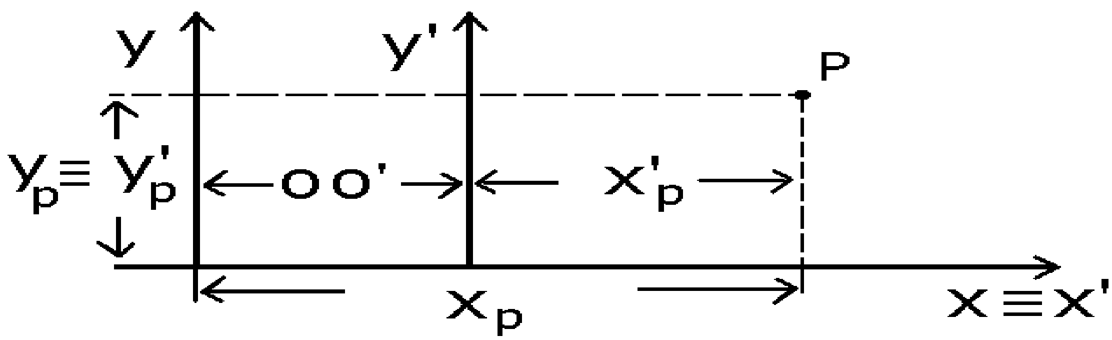
$\mathbf{a_t}$ e' responsabile della variazione del **modulo** della velocita'

SISTEMI DI RIFERIMENTO IN MOTO RELATIVO.

Consideriamo un sistema di riferimento **O**, e un altro, **O′**, che trasla rispetto a **O** con velocita' $\vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{O'}}$ come in figura

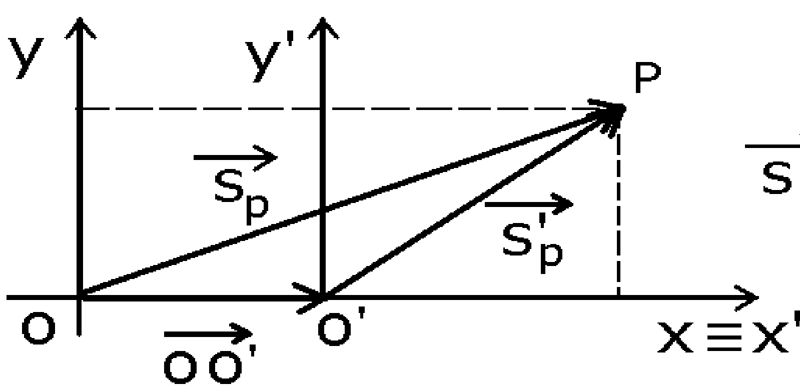


Un punto materiale **P** ha coordinate $\{x_P, y_P\}$ nel riferimento **O**. Quali saranno le sue coordinate nel riferimento **O′**?



$$\begin{cases} x'_p = x_p - OO' \\ y'_p = y_p \end{cases}$$

Queste relazioni si possono scrivere in forma vettoriale come segue



$$\vec{S}_p{}' = \vec{S}_p - \overrightarrow{OO'}$$

dove $\vec{s_P}$ e' il vettore posizione del punto **P**. Questa espressione e' piu' generale, perche' include il caso in cui **O′** abbia una componente della velocita' anche lungo l'asse y.

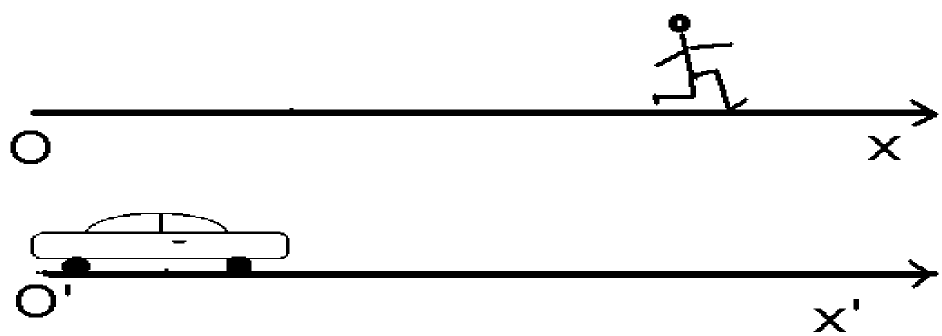
Derivando le trasformazioni delle coordinate rispetto al tempo, troviamo le relazioni che legano la velocita' del punto **P** rispetto a **O** a quella misurata nel riferimento **O′**
(ATTENZIONE: stiamo supponendo che il tempo scorra allo stesso modo nei due riferimenti!)

$$\begin{cases} x'_p = x_p - OO' \\ y'_p = y_p \end{cases} \qquad \begin{cases} v'_{px} = v_{px} - V_{O'} \\ v'_{py} = v_{py} \end{cases}$$

dove $\vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{O'}}$ e' la velocita' di **O′** rispetto a **O**. In forma vettoriale

$$\vec{v}'_p = \vec{v}_p - \vec{V}_{O'}$$

ESEMPIO: un uomo (punto **P**) corre con velocita' $\mathbf{v_P = 5\ km/h}$ rispetto alla strada (riferimento **O**). Un'automobile procede nella stessa direzione e nello stesso verso, con una velocita' $\mathbf{V_{O'} = 50\ km/h}$ (riferimento **O′**). Che velocita' ha l'uomo rispetto all'auto?



$$v'_p = v_P - V_{O'} \ \rightarrow \ v'_p = 5 - 50 = -45\ km/h$$

cioe' il guidatore vede l'uomo avvicinarsi (segno meno!!) a una velocita' di 45 km/h.

Derivando le trasformazioni della velocita', troviamo le trasformazioni per l'accelerazione

$$\begin{cases} v'_{px} = v_{px} - V_{o'} \\ v'_{py} = v_{py} \end{cases} \qquad \begin{cases} a'_{px} = a_{px} - A_{o'} \\ a'_{py} = a_{py} \end{cases}$$

e, in forma vettoriale

$$\vec{a}'_p = \vec{a}_p - \vec{A}_{o'}$$

dove $\vec{\mathbf{A}}_{\mathbf{O'}}$ e' l'accelerazione di $\mathbf{O'}$ rispetto a $\mathbf{O}$.

TRASFORMAZIONI GALILEIANE.

Abbiamo visto che conoscendo lo stato di moto di un punto materiale in un riferimento, possiamo ricavare quello rispetto a un altro riferimento, che trasla rispetto al primo, utilizzando le leggi di trasformazione

$$\vec{s}_p{}' = \vec{s}_p - \vec{OO'} \qquad \vec{v}_p{}' = \vec{v}_p - \vec{V}_{O'}$$

$$\vec{a}_p{}' = \vec{a}_p - \vec{A}_{O'}$$

Supponiamo ora che il moto di $\mathbf{O'}$ sia una traslazione uniforme, cioe' che $\mathbf{O'}$ si muova con velocita' costante rispetto a $\mathbf{O}$ e quindi $\vec{\mathbf{A}}_{\mathbf{O'}} = \mathbf{0}$. In questo caso le leggi di trasformazione diventano

$$\vec{s}_p{}' = \vec{s}_p - \vec{OO'} \qquad \vec{v}_p{}' = \vec{v}_p - \vec{V}_{O'}$$

$$\vec{a}_p{}' = \vec{a}_p$$

cioe, la trasformazione di coordinate e la legge di composizione delle velocita' rimangono invariate, ma l'accelerazione e' la stessa in entrambi i sistemi! Torneremo su questo punto in seguito.

TRASFORMAZIONI DI LORENTZ.

Se le velocita' dei corpi sono elevate e prossime a quella della luce **c = 300.000 km/s**, le trasformazioni di Galileo non sono piu' valide, e vanno sostituite con le trasformazioni di Lorentz. Nel caso di traslazione uniforme lungo l'asse x considerato prima, la composizione delle velocita', che secondo Galileo e'

$$v_p' = v_p - V_{o'} \quad \longrightarrow \quad v_p = v_p' + V_{o'}$$

diventa

$$v_p = \frac{v_p' + V_{o'}}{1 + \dfrac{v_p' V_{o'}}{c^2}}$$

Se assumiamo che $c \rightarrow \infty$ queste espressioni si riducono alle trasformazioni di Galileo.

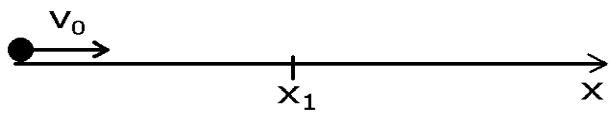
LE FORZE

Se la velocita' di un corpo varia nel tempo (in modulo, direzione o verso) vuol dire che su di esso agisce una forza. Esistono in natura vari tipi di forza: la forza gravitazionale, la forza elettromagnetica, la forza d'attrito, la forza elastica, etc. Studieremo le caratteristiche di alcune di queste forze in dettaglio in seguito. Ora ci poniamo la seguente domanda:

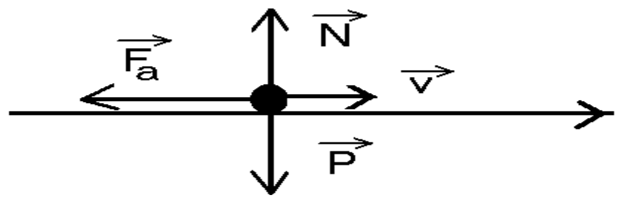
in che modo una forza altera lo stato di quiete o di moto di un corpo? Possiamo definire delle leggi?

Il moto dei corpi, che per semplicita' continuiamo a considerare **punti materiali**, e' governato da 3 leggi fondamentali, enunciate da Newton nel libro *PRINCIPIA MATHEMATICA*, scritto a partire dall'autunno del 1684 fino all'estate del 1686. In meno di due anni Newton formulo' la teoria del moto dei corpi e la legge di gravitazione universale, che sono i fondamenti della fisica prerelativistica.

Supponiamo di fare il seguente esperimento: lanciamo una pallina su un piano orizzontale con una certa velocita' iniziale v_0.



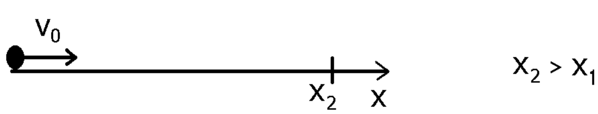
La pallina dopo un po' si ferma in $x = x_1$. **PERCHE'?** Vediamo quali sono le forze agenti sul corpo



$\vec{\mathbf{F}}_\mathbf{a}$ e' la forza d'attrito, $\vec{\mathbf{P}}$ e' la forza peso, $\vec{\mathbf{N}}$ e' la reazione vincolare, cioe' la forza esercitata dal piano, perpendicolarmente a se stesso, che equilibra la forza peso e impedisce al corpo di cadere (sulle forze vincolari torneremo in seguito). Dunque, la risultante delle forze nella direzione perpendicolare al piano e' zero

$$\vec{\mathbf{P}} + \vec{\mathbf{N}} = \mathbf{0}$$

e la forza d'attrito, l'unica nella direzione orizzontale, e' responsabile della decelerazione della pallina. Se levighiamo il piano in modo da ridurre l'attrito, e lanciamo la pallina con la stessa velocita' iniziale, questa arrivera' un po' piu' in la'



Immaginiamo ora di levigare il piano cosi' bene da eliminare completamente l'attrito, cioe' $\vec{\mathbf{F}}_\mathbf{a} = \mathbf{0}$; in questo caso il corpo proseguirebbe all'infinito, sempre con la stessa velocita', e non si fermerebbe piu'. In altre parole, il corpo proseguirebbe nel suo moto rettilineo uniforme, e la risultante delle forze esterne sarebbe zero

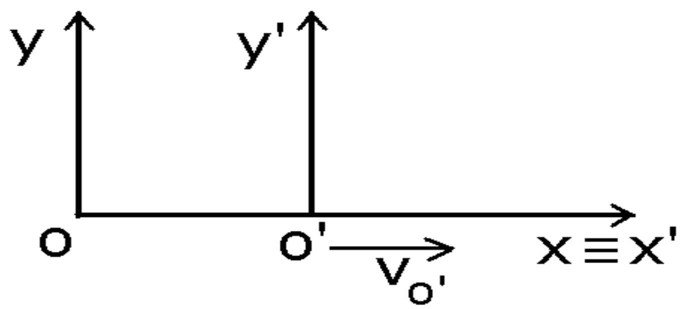
$$\vec{\mathbf{R}}_\mathbf{ext} = \vec{\mathbf{P}} + \vec{\mathbf{N}} = \mathbf{0}$$

Abbiamo dunque dimostrato che

I LEGGE

Un corpo soggetto a forze la cui risultante sia nulla, o sta fermo, o si muove di moto rettilineo uniforme (**Legge d'inerzia**).

Sulla base di questa legge possiamo definire i riferimenti inerziali.
DEFINIZIONE: **riferimenti inerziali** sono quelli in cui vale la legge d'inerzia (vedremo in seguito cosa accade nei riferimenti non inerziali).
Importante: se un riferimento e' inerziale, lo sono anche tutti quelli che si muovono rispetto ad esso di moto rettilineo uniforme.



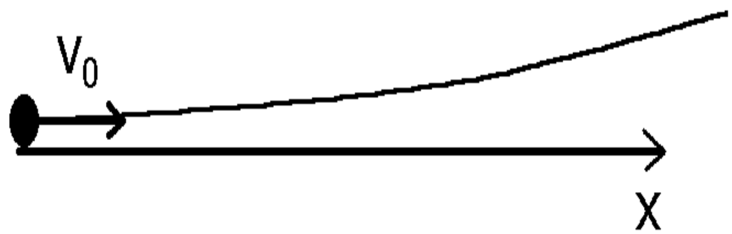
Infatti, studiando le trasformazioni galileiane avevamo visto che se $\vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{O}'} = \mathbf{costante}$

$$\vec{\mathbf{a}}'_{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{P}};$$

dunque se in un riferimento **O** l'accelerazione di un punto materiale **P** e' nulla, cioe' $\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$, essa sara' nulla anche nel riferimento $\mathbf{O}'$. Quindi anche rispetto a $\mathbf{O}'$ il corpo rimarra' in quiete, o continuera' a muoversi di moto rettilineo uniforme, cioe' anche in $\mathbf{O}'$ varra' la legge di inerzia.

LA TERRA E' UN RIFERIMENTO INERZIALE?

In realta', se facessimo l'esperimento della pallina su un piano privo di attrito e molto lungo, vedremmo che la traiettoria non e' proprio rettilinea, ma lentamente si incurva (quindi la velocita' cambia direzione)

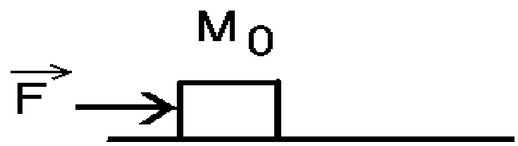


Se per esempio assumiamo che esista un riferimento inerziale che sia in quiete rispetto a delle stelle che consideriamo fisse nel cielo, un riferimento solidale con la terra ruotera' rispetto ad esso, e quindi non sara' un riferimento inerziale. Un corpo che abbia rispetto al riferimento inerziale una data accelerazione $\vec{a}$, avra' rispetto alla terra un'accelerazione diversa, $\vec{a}'_P \neq \vec{a}$. Siccome la causa dell'accelerazione sono le forze, questo vuol dire che nel riferimento solidale con la terra ci sono delle forze che non esistono nel riferimento inerziale e che sono proprio dovute al suo moto di rotazione. Una di queste e' la forza centrifuga, l'altra e' la **forza di Coriolis**, diretta perpendicolarmente alla velocita' dei corpi, che e' responsabile della deviazione della traiettoria.

Comunque, nel seguito in prima approssimazione considereremo la terra un riferimento inerziale.

II LEGGE

Supponiamo di trovarci in un **riferimento inerziale**, e di poggiare un corpo, fermo, su un piano orizzontale **privo di attrito**. Sia $\mathbf{M_0 = 1\ kg}$ la massa del corpo. Applichiamo a $\mathbf{M_0}$ una forza, che chiamiamo $\vec{\mathbf{F}}_\mathbf{0}$, tale da produrre un'accelerazione $\mathbf{a_0 = 1\ m/s^2}$



Avendo definito il campione di forza, possiamo applicare forze pari a multipli di $\vec{\mathbf{F}}_\mathbf{0}$. Cosi' facendo si trova che le accelerazioni prodotte crescono proporzionalmente alla forza applicata, in maniera che

$$\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{M_0}\,\vec{\mathbf{a}}$$

Ora teniamo fissa la forza applicata, per es. poniamola pari a $\vec{\mathbf{F}}_\mathbf{0}$, e facciamo variare la massa. Troveremo sempre che

$$\vec{\mathbf{F}}_\mathbf{0} = \mathbf{M}\,\vec{\mathbf{a}}$$

Possiamo dunque concludere che, in generale,

$$\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{M}\,\vec{\mathbf{a}}$$

ATTENZIONE: questa e' una relazione vettoriale; l'accelerazione ha sempre la stessa direzione e verso della forza che la induce

La massa, detta anche **massa inerziale**, non e' altro che quella caratteristica dei corpi che mette in relazione la forza applicata con l'accelerazione prodotta.

Dimensioni e unita' di misura della forza

Essendo la forza una massa per un'accelerazione, le sue dimensioni saranno

$$[\mathbf{F}] = [\mathbf{ma}] \;=\; [\mathbf{mlt^{-2}}]$$

L' unita' di misura della forza e' il **Newton** , pari a

$$\mathbf{1\ Newton = (1\ kg)\ (1\ m)/(1\ s^2)}$$

vale a dire e' la forza che, applicata a una massa di un kg, produce un'accelerazione di un metro al secondo quadrato.

Se vogliamo usare come unita' di misura il centimetro, il grammo e il secondo

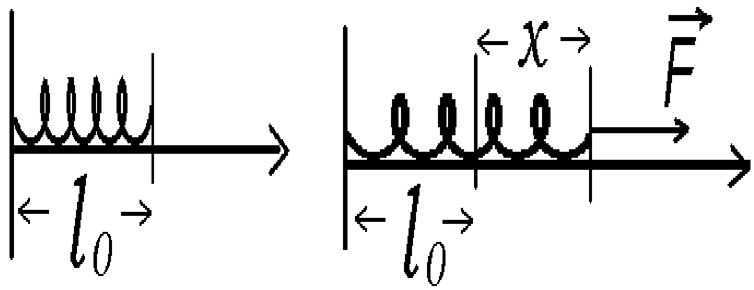
$$\mathbf{1\ Newton = (10^3\ g)\ (10^2\ cm)/(1\ s^2) = 10^5 g\ cm/s^2}$$

In queste unita' , l'unita' di forza e' il **dyne**, quindi

$$\mathbf{1\ Newton = 10^5\ dyne}$$

Come si misurano le forze

Uno strumento per misurare le forze e' il dinamometro, formato da una molla attaccata a un sostegno.



La molla ideale e' un oggetto che ha massa trascurabile, e che se allungata o compressa di un tratto $\mathbf{x}$ rispetto alla posizione di equilibrio, reagisce con una forza pari a

$$\vec{F} = -\mathbf{k}\vec{x}.$$

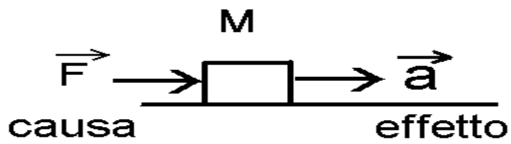
Questa e' l'espressione delle forze elastiche, nota anche come **legge di HOOKE**. $\mathbf{k}$ e' detta **costante elastica della molla**. Il segno meno sta ad indicare che la forza ha sempre verso opposto a quello dello spostamento, cioe' tende a riportare la molla nella posizione di equilibrio. Per misurare una forza incognita $\vec{\mathbf{F}}$ si puo' procedere cosi': applichiamo la forza unitaria $\vec{\mathbf{F}}_0$ al dinamometro come in figura. La molla si allunghera' di un tratto $\mathbf{x_0}$, che misuriamo, tale che $\mathbf{F_0} = \mathbf{kx_0}$. Se ora applichiamo al dinamometro la forza incognita $\vec{\mathbf{F}}$, questa produrra' un allungamento $\mathbf{x}$ tale che $\mathbf{F} = \mathbf{kx}$, quindi facendo il rapporto

$$\frac{\mathbf{F}}{\mathbf{F_0}} = \frac{\mathbf{kx}}{\mathbf{kx_0}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{F} = \mathbf{F_0}\,\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x_0}}.$$

Quindi, misurando l'allungamento $\mathbf{x}$ possiamo misurare la forza. Se ad esempio l'allungamento della molla prodotto da una forza incognita e' pari a 3 volte quello della forza unitaria, $\mathbf{x_0}$, vuol dire che la forza $\vec{\mathbf{F}}$ e' pari a 3 Newton.

RIEPILOGANDO

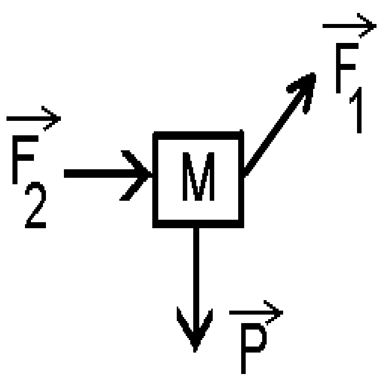
- Cosa significa l'equazione $\vec{F} = M\vec{a}$?
  che se applico a un corpo di massa M una forza $\vec{F}$ il corpo subira' un'accelerazione $a = \dfrac{F}{M}$ nella stessa direzione della forza



- Cosa accade se sul corpo agiscono piu' forze? La seconda legge della dinamica diventa

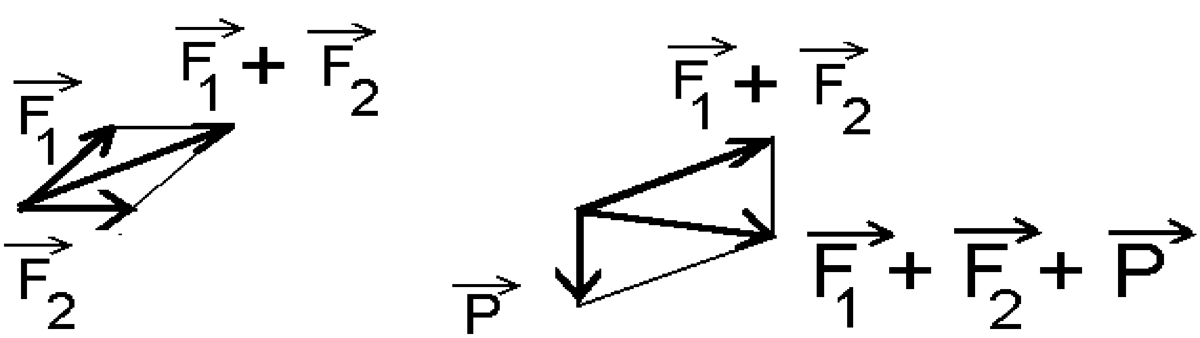
$$\sum_i \vec{F}_i = M\,\vec{a}$$

dove $\sum_i \vec{F}_i$ e' la somma **vettoriale** delle forze agenti su M.

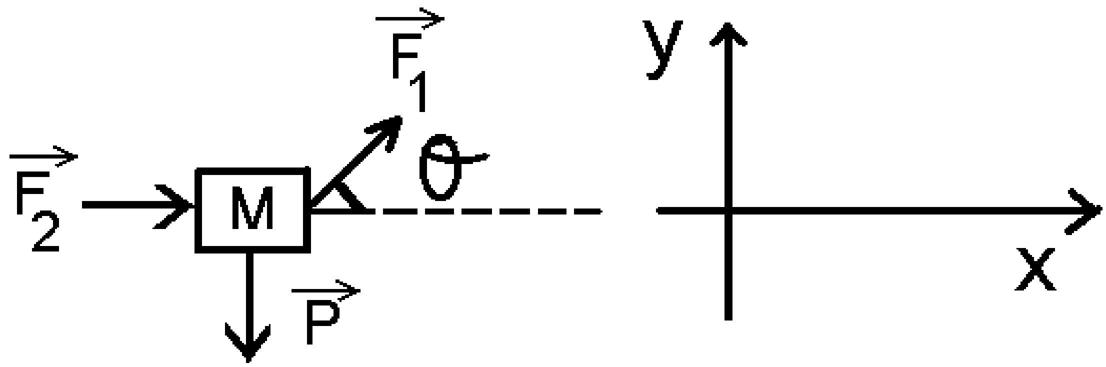


$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{P},$$

Calcoliamo la risultante con la regola del parallelogramma



La legge $\vec{F} = M\vec{a}$ puo' essere proiettata sugli assi di un riferimento opportunamente scelto. Per esempio nel caso della figura precedente

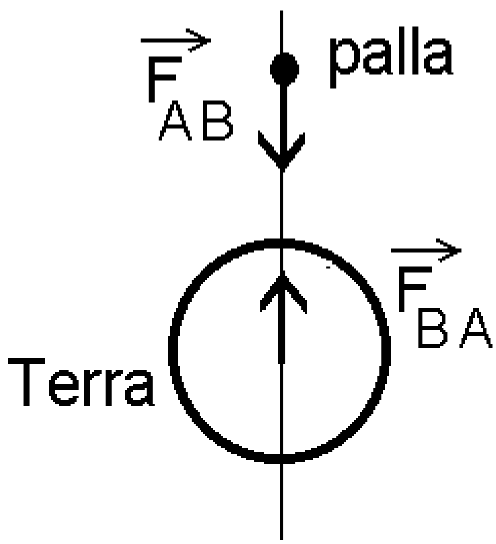


$$\begin{cases} \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_x = F_1 + F_2 \ cos \ \ \theta \\ \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_x = - \ P + F_2 \ sen \ \ \theta \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} M \ a_x = F_1 + F_2 \ cos \ \ \theta \\ M \ a_y = - \ P + F_2 \ sen \ \ \theta \end{cases} .$$

Da queste equazioni, note le forze, possiamo calcolare le componenti dell'accelerazione lungo gli assi x e y. Integrando una volta troveremo le componenti della velocita' e integrando ancora le equazioni del moto.

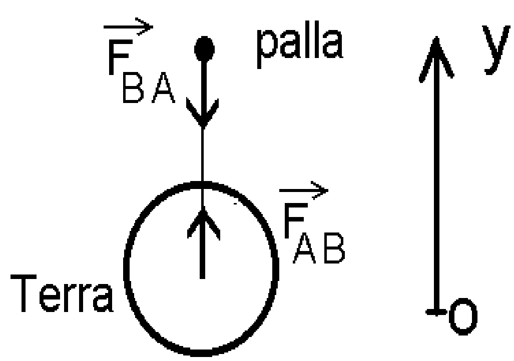
III LEGGE

Se un corpo A esercita una forza sul corpo B, $\mathbf{F_{AB}}$, il corpo B esercitera' una forza uguale in modulo, $\mathbf{F_{BA}} = \mathbf{F_{AB}}$ avente la stessa direzione, ma verso opposto. IMPORTANTE: il punto di applicazione delle due forze e' diverso .



Per esempio, la terra esercita su una palla di massa $\mathbf{m}$ la forza gravitazionale $\mathbf{F_{AB}} = \frac{\mathbf{GM_Tm}}{\mathbf{r^2}}$, diretta lungo la retta che congiunge i centri dei due corpi, con verso dalla palla alla terra, e applicata al centro della palla. Questa, a sua volta, esercita sulla terra una forza $\mathbf{F_{BA}}$, uguale in modulo a $\mathbf{F_{AB}}$, avente la stessa direzione, ma verso opposto, e applicata al centro della terra.

Dunque, se la palla cade sulla terra, perche' la terra non cade sulla palla? In realta' la terra cade sulla palla, ma con un'accelerazione piccolissima. Vediamo perche'. Fissiamo un riferimento inerziale come in figura e scriviamo la seconda legge



$$M_T\ a_T = \frac{GM_Tm}{r^2}$$

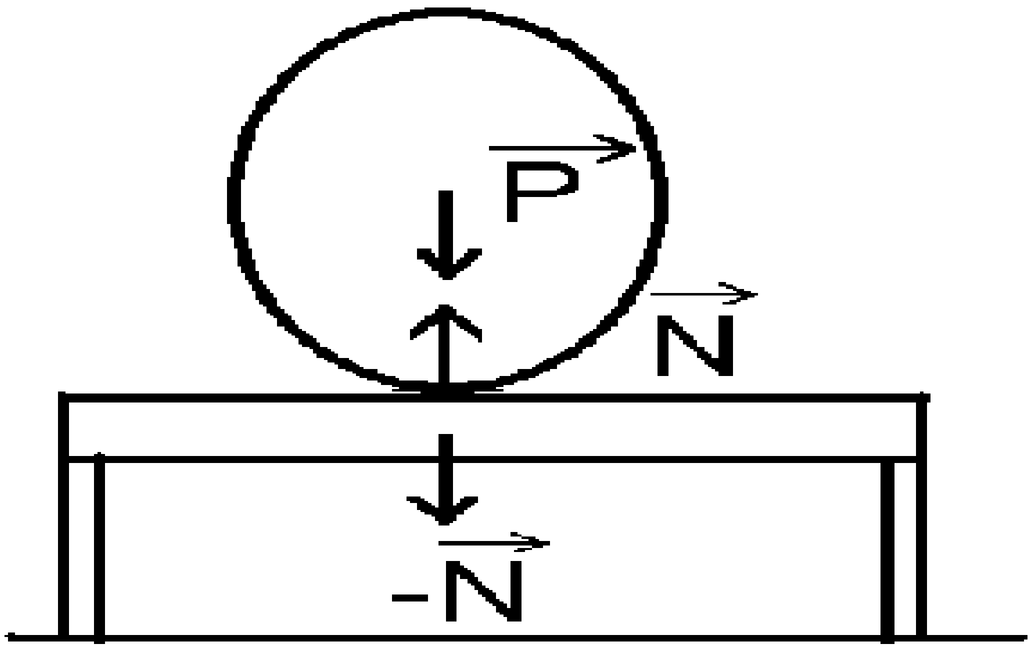
$$m\ a_P = -\frac{GM_Tm}{r^2}$$

quindi

$$a_T = \frac{G\ m}{r^2}, \quad a_P = -\frac{G\ M_T}{r^2}$$

e $|a_p| >> a_T$.

Altro esempio di coppia azione-reazione.



$\vec{\mathbf{N}}$ e' la reazione vincolare, $\vec{\mathbf{P}}$ e' la forza peso che agisce sulla palla. Sappiamo che $\vec{\mathbf{N}}$ e $\vec{\mathbf{P}}$ sono uguali e opposte e che hanno la stessa direzione, pero' NON SONO una coppia azione-reazione. Infatti sono entrambe applicate alla palla! $\vec{\mathbf{P}}$ fa coppia azione-reazione con la forza di attrazione gravitazionale che la palla esercita sulla terra (come visto prima), invece $\vec{\mathbf{N}}$ fa coppia con una forza $-\vec{\mathbf{N}}$ applicata al centro di massa del tavolino.

Apriamo una parentesi sulla forza gravitazionale

La legge di gravitazione universale formulata da Newton afferma che due corpi puntiformi si attraggono con una forza che e' inversamente proporzionale al quadrato della distanza. In realta' la legge andrebbe scritta in questo modo

$$\mathbf{F_G = G\frac{m_{g1}\ m_{g2}}{r^2}},$$

dove m_{g1} e m_{g2} sono due costanti che caratterizzano i due corpi e che chiameremo "massa gravitazionale". Gli esperimenti dimostrano che la massa gravitazionale m_g e' uguale (entro una parte su 10^{12}) alla massa inerziale che compare nella seconda legge della dinamica

$$\vec{F} = m\ \vec{a}.$$

Da questa uguaglianza tra massa gravitazionale e massa inerziale deriva il fatto che quando scriviamo la seconda legge per un corpo soggetto alla forza di gravita'

$$m\ a = G\frac{m_g\ M_T}{r^2},$$

possiamo semplificare m e m_g, per cui

$$a = G\frac{M_T}{r^2}.$$

Da cio' segue che tutti i corpi cadono sulla terra con la stessa accelerazione.
G e' la costante di gravitazione universale pari a

$$\mathbf{G = 6.673 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2}$$

Quando si studia il moto di corpi nelle vicinanze della superficie terrestre, si usa un'espressione semplificata per la forza di gravita'

$$\vec{\mathbf{P}} = \mathbf{m}\ \vec{\mathbf{g}} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{g} = \mathbf{9.8\ m/s^2}.$$

Il motivo e' il seguente. Se un corpo cade da un'altezza $\mathbf{h}$ rispetto alla superficie terrestre, l'accelerazione di gravita' iniziale e'

$$a = G\frac{M_T}{(\mathbf{R_T} + \mathbf{h})^2}$$

dove $\mathbf{R_T}$ e' il raggio della terra

$$\mathbf{R_T} = 6371\ km = 6.371 \cdot 10^5 m.$$

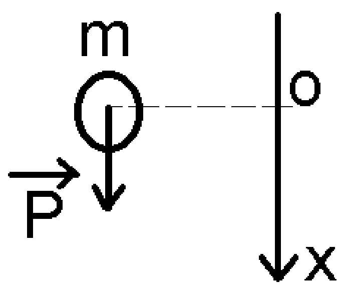
Se assumiamo che $\mathbf{h}$ sia molto minore di $\mathbf{R_T}$, ipotesi ragionevole se studiamo il moto dei corpi in prossimita' della terra, allora

$$a \simeq G\frac{M_T}{(R_T)^2} = 6.673 \cdot 10^{-11} \frac{5.997 \cdot 10^{24}\ kg}{(6.371 \cdot 10^5\ m)^2} \simeq 9.8\ m/s^2.$$

CADUTA DEI GRAVI

Supponiamo che un corpo di massa m venga lasciato cadere con velocita' iniziale nulla. Quanto tempo impieghera' a cadere e che velocita' avra' quando tocca terra?

Poiche' agisce solo la forza peso (supponiamo trascurabile la resistenza dell'aria) il corpo verra' accelerato nella stessa direzione, quindi il moto e' in una sola dimensione.



Scegliendo l'asse x come in figura, dalla seconda legge della dinamica ricaviamo

$$m\ a = m\ g \ \rightarrow \ a = g$$

(Poiche' il moto e' in una dimensione invece di scrivere a_x scriviamo semplicemente a). Integrando una volta troviamo

$$a = \frac{dv}{dt} \ \rightarrow \ \int_{v(t_0)}^{v(t)} dv = \int_{t_0}^{t} a\ dt$$

Poniamo $t_0 = 0$; essendo $v(0) = 0$ e $a = g$,

$$v(t) = \int_0^t g\ dt \ \rightarrow \ v = g\ t;$$

integrando ancora troviamo l'eq. oraria

$$v = \frac{dx}{dt} \ \rightarrow \ \int_0^{x(t)} dx = \int_0^t v\ dt \ \rightarrow \ x(t) = \frac{1}{2}\ g\ t^2$$

Il corpo tocca terra quando $x = h$, quindi sostituendo

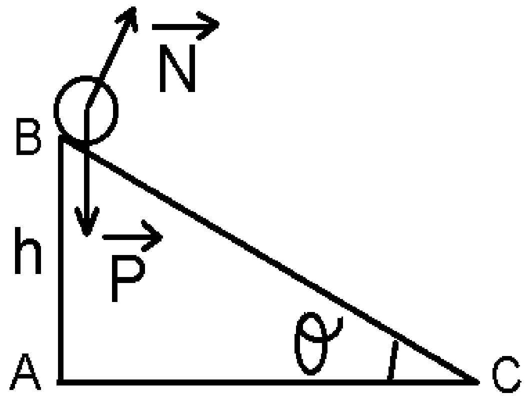
$$h = \frac{1}{2}\ g\ t^2 \ \rightarrow \ t = \sqrt{\frac{2\ h}{g}}$$

e sostituendo nell'espressione della velocita'

$$v = g\ \sqrt{\frac{2\ h}{g}} = \sqrt{2\ g\ h}.$$

IL PIANO INCLINATO

Supponiamo di avere un piano privo d'attrito, inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale. Sia h la sua altezza. Un corpo di massa m, posto da fermo alla sua sommita' all'istante t=0, comincia a scivolare. Come descriviamo il moto?

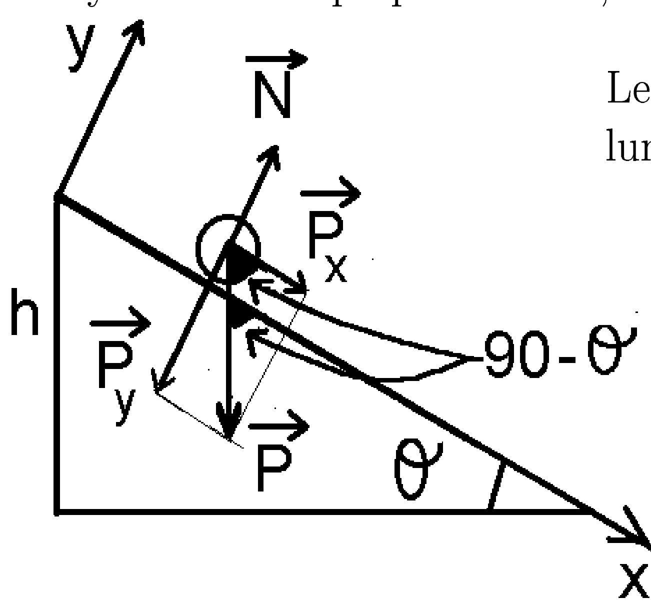


Sul corpo agiscono le seguenti forze: la forza peso $\vec{P} = m\vec{g}$ perpendicolare alla base del piano AC; la reazione vincolare $\vec{N}$, perpendicolare alla superficie del piano BC.

Per la seconda legge della dinamica

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N}$$

Scomponiamo questa equazione lungo gli assi di un riferimento cartesiano scelto in modo tale che l'asse x sia diretto lungo il piano e l'asse y sia ad esso perpendicolare, come in figura

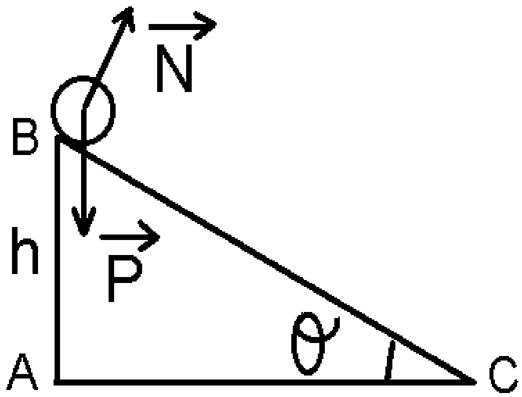


Le componenti della forza peso lungo gli assi sono

$$\begin{cases} P_x = mg\ sen\ \theta \\ P_y = mg\ cos\ \theta \end{cases}$$

quindi

$$\begin{cases} m\ a_x = mg\ sen\ \theta \\ m\ a_y = N - mg\ cos\ \theta \end{cases}$$



$$\begin{cases} m\ a_x = mg\ sen\ \theta \\ m\ a_y = N - mg\ cos\ \theta \end{cases}$$

poiche' non c'e' moto lungo l'asse y, $a_y = 0$, quindi

$$N = mg\ cos\ \theta,$$

cioe' come ci aspettavamo, la reazione vincolare esercitata dal piano e' uguale alla componente della forza peso che "preme" sul piano. Dalla prima equazione inoltre ricaviamo che

$$a_x = g\ \ sen\ \theta$$

Integriamo ponendo $t_0 = 0$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \rightarrow \int_{v_x(0)}^{v_x(t)} dv_x = \int_0^t a_x\, dt \rightarrow v_x(t) - v_x(0) = \int_0^t g\ \ sen\, \theta\, dt$$

quindi

$$v_x = v_x(0) + g\ \ sen\ \theta\ t.$$

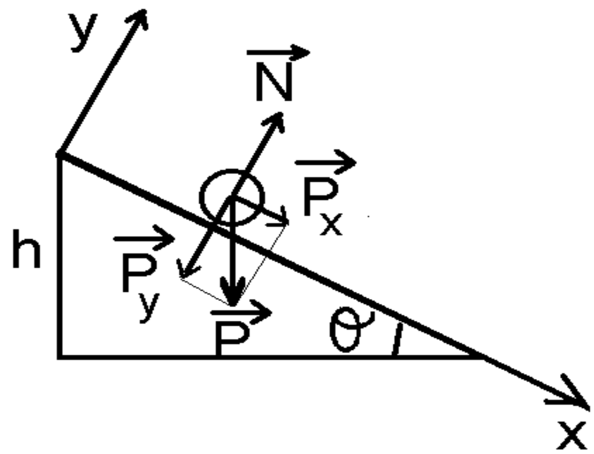
Integrando ancora troviamo l'equazione oraria

$$v_x = \frac{dx}{dt} \rightarrow \int_{x(0)}^{x(t)} dx = \int_0^t v_x\, dt \rightarrow x(t) - x(0) = \int_{t_0}^t [v_x(0) + g\ \ sen\, \theta\, t]\, dt$$

quindi

$$x(t) = x(0) + v_x(0)\ t + \frac{1}{2}\, g\ \ sen\ \theta\ t^2$$

$$\begin{cases} v_x = v_x(0) + g \;\; sen\ \theta\ t \\ x(t) = x(0) + v_x(0)\ t + \frac{1}{2}\ g \;\; sen\ \theta\ t^2 \end{cases}$$



Ci chiediamo ora

- Quando il corpo tocca terra?
  Quando avra' percorso tutto il piano inclinato, cioe' $x = \frac{h}{sen\ \theta}$. Sostituendo questo valore di x nell'eq. oraria si trova

$$\frac{h}{sen\ \theta} = \frac{1}{2}\ g \;\; sen\ \theta\ t^2 \ \rightarrow\ t = \sqrt{\frac{2\ h}{g\ sen\ ^2\theta}}$$

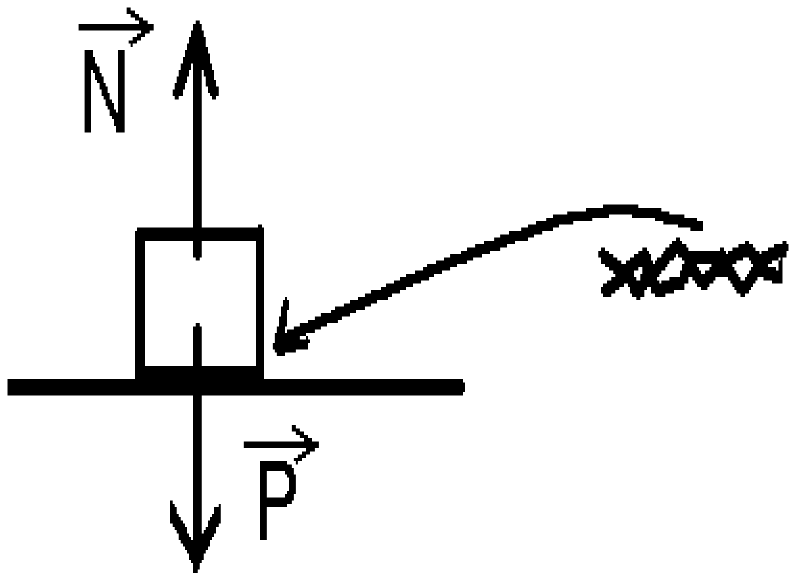
- Che velocita' avra'?
  Supponiamo che il corpo parta da fermo ($v_x(0) = 0$) dall'eq. della velocita' si trova

$$v_x = g \;\; sen\ \theta\ t = g \;\; sen\ \theta\ \sqrt{\frac{2\ h}{g\ sen\ ^2\theta}} = \sqrt{2\ g\ h}.$$

  che e' la stessa che abbiamo ottenuto nel caso che il corpo cada in verticale!!

L' ATTRITO

Supponiamo che un corpo molto pesante sia fermo su un piano.Su di esso agiscono la forza peso $\vec{P}$ e la reazione vincolare $\vec{N}$, la cui risultante e' nulla.

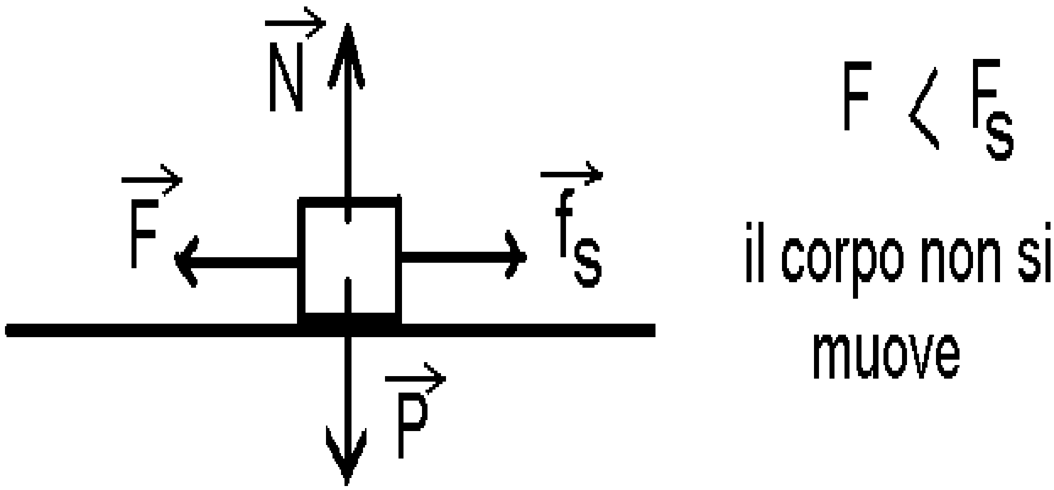


L'attrito e' dovuto all'effetto collettivo delle forze che si esercitano tra gli atomi delle superfici a contatto. Se le superfici sono levigatissime, in modo che gli atomi siano a piu' stretto contatto, queste forze di interazione possono diventare fortissime, tanto che le superfici si saldano tra loro (saldatura a freddo). Normalmente pero' quando due superfici sono a contatto, a livello microscopico si toccano solo in alcuni punti e le forze di interazione hanno una risultante che non richiede forze enormi per essere vinta (a meno che il peso non sia enorme!).

E' esperienza comune che se proviamo a far strisciare un corpo molto pesante applicando una forza orizzontale $\vec{\mathbf{F}}$ il corpo all'inizio non si muovera', finche' la forza non raggiunge una certa intensita', che chiameremo $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{s}}$.
Questo valore limite si dice

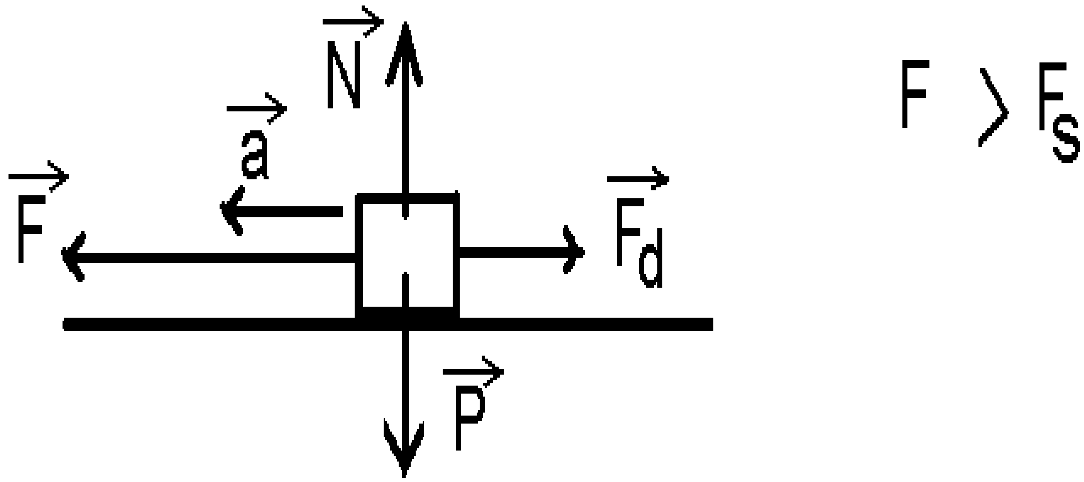
forza di **attrito statico**.

Se la forza applicata e' $\mathbf{F} < \mathbf{F}_{\mathbf{s}}$ il corpo sta fermo, quindi vuol dire che il piano su cui poggia esercita una forza, $\vec{\mathbf{f}}_{\mathbf{s}}$, che e' in grado di annullare quella applicata dall'esterno.



Il motivo e' che per far muovere il corpo bisogna vincere la risultante delle forze dovute alle microsaldature a freddo che si generano nei punti di contatto tra le due superfici.

Quando la forza applicata supera $\mathbf{F_s}$, il corpo comincia a muoversi.



A questo punto la forza di attrito si riduce. Cio' e' dovuto al fatto che, mentre il corpo striscia, i punti di contatto tra le superfici variano istante per istante, quindi si formano nuove microsaldature che vengono pero' immediatamente strappate dalla forza che tira. In questa fase la risultante delle forze che si oppone al moto e' detta **attrito dinamico**, e la indicheremo con $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{d}}$. Quindi in generale

$$\mathbf{F_s} > \mathbf{F_d}.$$

Le forze d'attrito sono:

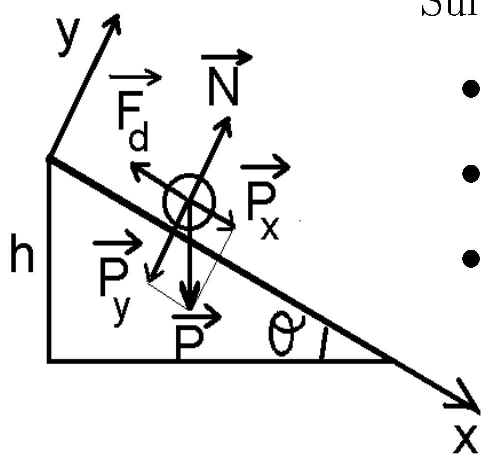
- parallele alla superficie di contatto e opposte alla direzione del moto,
- **i moduli** della forza di attrito statico e della forza di attrito dinamico sono entrambi proporzionali **al modulo** della reazione vincolare $\vec{N}$, cioe'

$$F_s = \mu_s N, \qquad F_d = \mu_d N,$$

  dove i coefficienti d'attrito statico e dinamico, μ_s e μ_d sono costanti adimensionali che dipendono dalla natura delle superfici a contatto.

IL PIANO INCLINATO CON ATTRITO

Un corpo scivola su un piano inclinato e tra corpo e piano c'e' una forza d'attrito dinamico con coefficiente μ_d. Vediamo come descrivere il moto



Sul corpo agiscono le seguenti forze:

- la forza peso $\vec{P} = m\vec{g}$
- la reazione vincolare $\vec{N}$,
- la forza d'attrito dinamico pari in modulo a $F_d = \mu_d\, N$, tangente al piano e diretta nel verso opposto a quello del moto

Per la seconda legge della dinamica

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_d$$

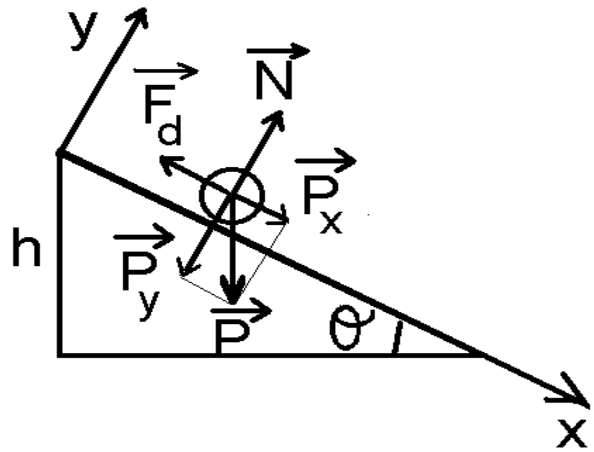
Proiettiamo questa equazione lungo gli assi cartesiani ricordando che $P_x = mg\ sen\ \theta$ e $P_y = -mg\ cos\ \theta$

$$\begin{cases} m\ a_x = mg\ sen\ \theta - \mu_d\ N \\ m\ a_y = N - mg\ cos\ \theta \end{cases}$$

$a_y = 0$ perche' non c'e' moto lungo l'asse y quindi, come prima, $N = mg\ cos\ \theta$. La prima equazione diventa

$$ma_x = mg\ \ sen\ \theta - \mu_d\ mg\ \rightarrow\ a_x = g\,[\ sen\ \theta - \mu_d\ cos\ \theta]$$

l'accelerazione e' dunque minore del caso in cui l'attrito non c'e'.



$$a_x = g\,[\ sen\ \theta - \mu_d\ cos\ \theta]$$

Supponendo che a $t = 0$ il corpo si trovi a $x(0) = 0$, con velocita' iniziale nulla ($v_x(0) = 0$), integrando una volta troviamo

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \ \rightarrow \ \int_0^{v_x(t)} \ dv_x = \int_{t_0}^{t} \ g\,[\ sen\ \theta - \mu_d\ cos\ \theta]\ dt,$$

quindi

$$v_x(t) = g\,(\ sen\ \theta - \mu_d\ cos\ \theta)\,t.$$

Integrando ancora

$$v_x = \frac{dx}{dt} \ \rightarrow \ \int_0^{x(t)} \ dx = \int_0^{t} \ g\,(\ sen\ \theta - \mu_d\ cos\ \theta)\,t\ dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2} g\,(\ sen\ \theta - \mu_d\ cos\ \theta)\ \ t^2$$

Il corpo tocca terra quando $x = \frac{h}{sen\ \theta}$. Sostituendo nell'eq. oraria

$$\frac{h}{sen\ \theta} = \frac{g\,(\ sen\ \theta - \mu_d\ cos\ \theta)\,t^2}{2} \rightarrow t = \sqrt{\frac{2\ h}{g\ sen\ \theta\,(\ sen\ \theta - \mu_d\ cos\ \theta)}}$$

dall'eq. della velocita' si trova

$$\begin{aligned} v_x(t) \ &= \ g\,(\ sen\ \theta - \mu_d\ cos\ \theta)\sqrt{\frac{2\ h}{g\ sen\ \theta\,(\ sen\ \theta - \mu_d\ cos\ \theta)}} \\ &= \sqrt{2\ g\ h\frac{(\ sen\ \theta - \mu_d\ cos\ \theta)}{sen\ \theta}} = \sqrt{2\ g\ h\left(1 - \frac{\mu_d\ cos\ \theta}{sen\ \theta}\right)} \end{aligned}$$

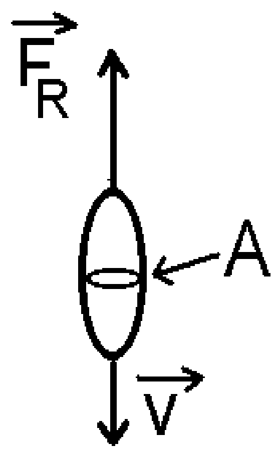
A causa della presenza dell'attrito, la velocita' di arrivo non e' piu' la stessa che abbiamo ottenuto nel caso che il corpo cada in verticale.

RESISTENZA DEL MEZZO

Quando un corpo solido si muove in un fluido o in un gas, su di esso agisce una forza di resistenza del mezzo. In generale le forze di resistenza dipendono dalla velocita' e dalla forma del corpo. Per esempio nel caso di moto nell'aria la forza di resistenza puo' essere cosi' schematizzata

$$\mathbf{F_R} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\, \mathbf{C}\rho\ \mathbf{A}\ \mathbf{v^2},$$

dove ρ e' la densita' del mezzo, **A** e' l'area della sezione del corpo tagliata da un piano perpendicolare alla velocita' (sezione trasversale) e **C** e' detto coefficiente aerodinamico, che, in prima approssimazione, si puo' considerare costante e compreso tra $\sim [0.1, 0.4]$.



Dunque la forza di resistenza e' proporzionale alla densita' del mezzo e al quadrato della velocita' del corpo. Inoltre e' tanto piu' grande quanto maggiore e' la sezione trasversale del corpo; per questo ad esempio gli sciatori si raggomitolano a uovo per incontrare meno resistenza.

VELOCITA' LIMITE

Supponiamo che un corpo inizi a cadere da fermo, in aria. Per la seconda legge della dinamica

$$ma = mg - \frac{1}{2}\, C\rho\ A\ v^2 \ \rightarrow\ a = g - \frac{1}{2m}\, C\rho\ A\ v^2$$

All'istante iniziale la velocita' e' zero, quindi il corpo accelera con accelerazione g. Appena acquista una piccola velocita', la forza di resistenza diventa diversa da zero e l'accelerazione diminuisce un po'. Il corpo quindi continua ad accelerare ma con accelerazione minore di g. Man mano che la velocita' aumenta, la resistenza del mezzo cresce e quindi l'accelerazione del corpo diminuisce, ma la velocita' continua a crescere. Arriva pero' il momento che la velocita' assume un valore tale che

$$mg - \frac{1}{2}\, C\rho\ A\ v^2 = 0 \ \rightarrow\ a = 0.$$

Da questo istante in poi l'accelerazione e' zero, quindi la velocita' rimane costante e pari al suo valore limite:

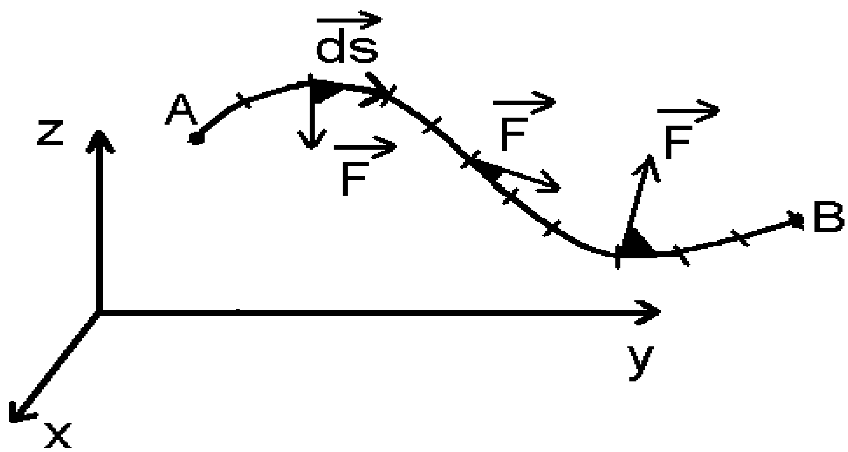
$$v_{lim} = \sqrt{\frac{2\ m\ g}{C\ \rho\ A}}.$$

LAVORO DI UNA FORZA

Il lavoro e' una grandezza fisica che esprime come l'energia venga trasferita a un corpo tramite l'applicazione di una forza. Il lavoro fatto dalla forza per spostare il punto di applicazione dalla posizione A alla posizione B e' pari a

$$\mathbf{L_{AB}} = \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{ds}}$$

Il lavoro e' una grandezza SCALARE



In pratica si divide la traiettoria in tanti elementi $\vec{ds}$, si esegue il prodotto scalare tra $\vec{ds}$ e la forza $\vec{F}$, e infine si sommano tutti i contributi cosi' ottenuti.

- se conosciamo istante per istante i **moduli** di forza e spostamento e **l'angolo** tra loro

$$\mathbf{L_{AB}} = \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{ds}} = \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \mathbf{F\ ds\ \ cos}\ \theta$$

da questa espressione si vede che il lavoro e' **POSITIVO** se l'angolo tra forza e spostamento e' minore di 90^o, e' negativo se e' maggiore di 90^o. **Inoltre, se forza e spostamento sono ortogonali, il lavoro e' nullo**

- se conosciamo invece le **componenti** di forza e spostamento

$$\mathbf{L_{AB}} = \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{ds}} = \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \mathbf{F_x dx + F_y dy + F_z dz}$$

Dimensioni e unita' di misura del lavoro

Il lavoro ha le dimensioni di una forza per uno spostamento, quindi

$$[\mathbf{L}] = [\mathbf{F\ s}] \ = \ [\mathbf{mlt^{-2}\ l}] \ = \ [\mathbf{m\ l^2\ t^{-2}}]$$

L' unita' di misura del lavoro e' il **Joule** , pari a

$$1\ Joule = (\mathbf{1\ kg})\ (\mathbf{1\ m^2})/(\mathbf{1\ s^2})$$

Se vogliamo esprimere le grandezze fondamentali in centimetri, grammi e secondi, allora l'unita' di misura del lavoro si chiama **erg** ,

$$1\ erg = (\mathbf{1\ g})\ (\mathbf{1\ cm^2})/(\mathbf{1\ s^2})$$

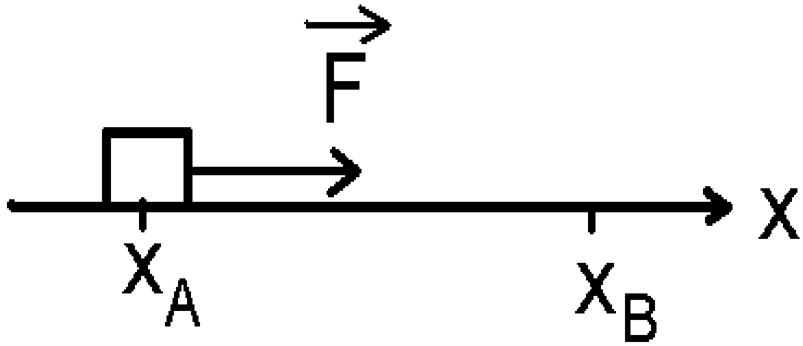
La relazione tra le due unita' e'

$$\mathbf{1\ Joule} = (\mathbf{1\ kg})\ (\mathbf{1\ m^2})/\mathbf{1\ s^2} = \mathbf{10^3\ g\ 10^4\ cm^2}/\mathbf{1\ s^2} = \mathbf{10^7\ erg}$$

ALCUNI ESEMPI

$$\mathbf{L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_A^B F\ ds\ \ cos\ \theta = \int_A^B F_x dx + F_y dy + F_z dz}$$

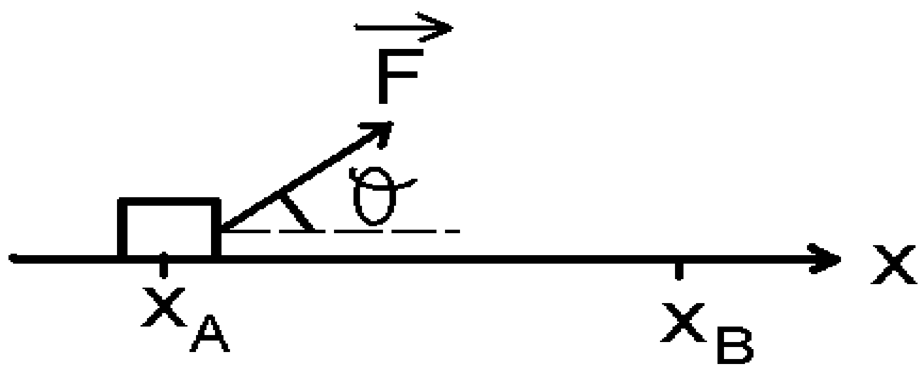
Supponiamo che la forza sia **costante**



in questo caso $\theta = 0$, quindi

$$L_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} F dx = F \int_{x_A}^{x_B} dx = F\,(x_B - x_A)$$

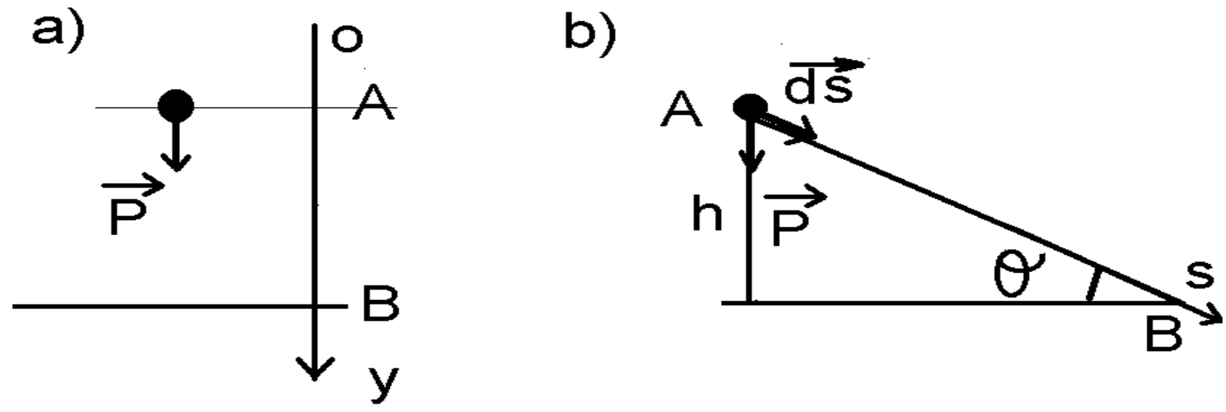
Se la forza forma un angolo θ con lo spostamento



$$L_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} F dx\ cos\ \theta = F \int_{x_A}^{x_B} dx\ cos\ \theta = F\,(x_B - x_A)\ \ cos\ \theta$$

si fa un lavoro minore del precedente.
Concludiamo che, **se la forza e' costante**, il lavoro e' semplicemente pari al modulo della forza per lo spostamento, per il coseno dell'angolo tra i due.

LAVORO DELLA FORZA PESO



La forza peso e' costante, quindi

$$L_{AB} = m\vec{g} \cdot \vec{s}$$

nel caso **a)** forza e spostamento sono paralleli, $\quad cos\ \theta = 1$

$$L_{AB} = mg\,(y_B - y_A) = mgh$$

nel caso **b)** l'angolo tra la forza peso e lo spostamento e' $\ (90 - \theta)$ quindi $\quad cos\ (90 - \theta) = \ sen\ \theta;$ se $\quad AB = d$

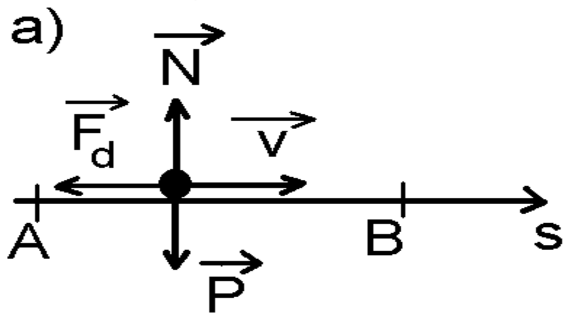
$$L_{AB} = mg\ d\ \ sen\ \theta;$$

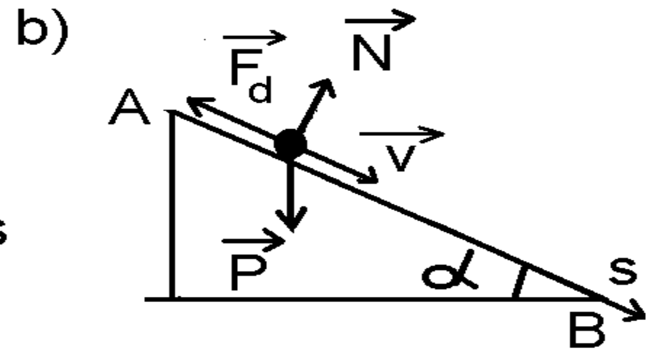
ma $\ \ d\ \ sen\ \theta = h,$ quindi

$$L_{AB} = mgh$$

come nel caso precedente! Discuteremo in seguito questa importante proprieta' del campo gravitazionale.

LAVORO DELLA FORZA D'ATTRITO





$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{ds}$$

- la forza d'attrito dinamico e' data da $\mathbf{F_d} = \mu_\mathbf{d}\, \mathbf{N}$ e quindi e' costante
- la sua direzione e' la stessa del moto, ma il verso e' opposto, quindi l'angolo tra forza e spostamento e'

$$\theta = \pi \;\rightarrow\; cos\;\theta = -1$$

di conseguenza il lavoro della forza d'attrito e' sempre negativo, cioe' e' un **lavoro resistente**

nel caso **a)**

$$N = mg \;\rightarrow\; F_d = \mu_d\, mg$$

$$L_{AB} = -\mu_d\, mg\; (s_B - s_A)$$

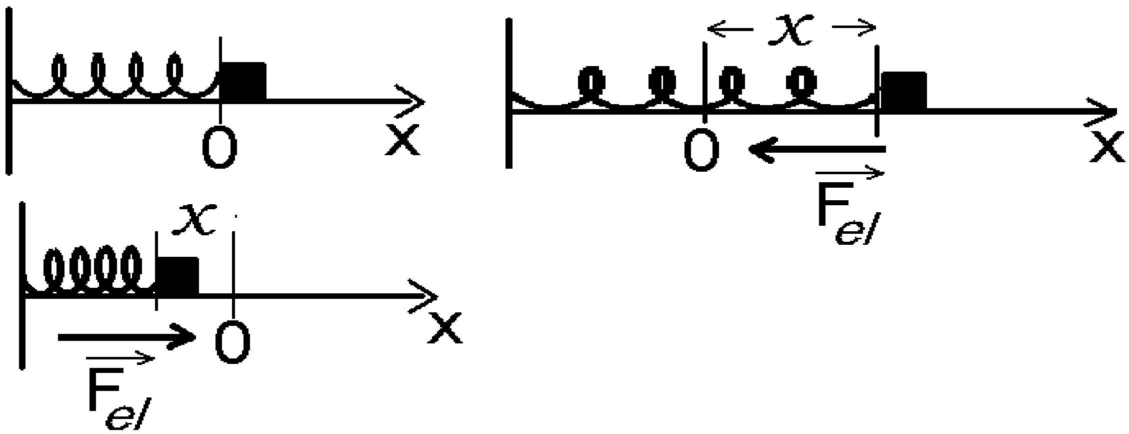
nel caso **b)**

$$N = mg\; cos\; \alpha \;\rightarrow\; F_d = \mu_d\, mg\; cos\; \alpha$$

$$L_{AB} = -\mu_d\, mg\; (s_B - s_A)\; cos\; \alpha$$

quindi il lavoro e' tanto minore quanto piu' il piano e' inclinato.

LAVORO DELLA FORZA ELASTICA



La forza elastica che agisce sul corpo **NON** e' costante. Infatti, il suo modulo e' $\mathbf{F_{el} = k\ x}$ ed e' diretta in verso opposto a quello del vettore $\vec{\mathbf{x}}$ che rappresenta l'allungamento (o l'accorciamento) rispetto alla lunghezza a riposo. Quindi in questo caso l'angolo tra forza e spostamento e'

$$\theta = \pi \ \rightarrow \ \ cos\ \theta = -1,$$

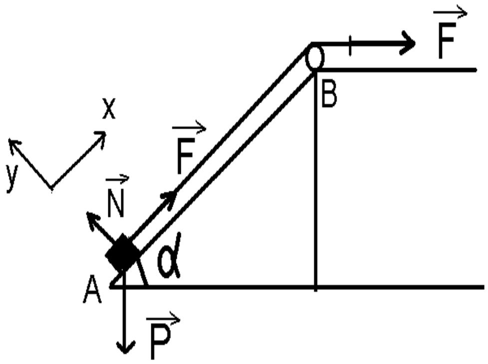
e il lavoro fatto dalla forza elastica per spostare il corpo da x_A a x_B e'

$$L_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{x_A}^{x_B} -kxdx = -k \int_{x_A}^{x_B} xdx = -\frac{1}{2}kx_B^2 + \frac{1}{2}kx_A^2$$

Il lavoro della forza elastica e' dunque sempre un lavoro resistente; il lavoro che noi dobbiamo fare dall'esterno per allungare o accorciare una molla di un tratto $\mathbf{x}$ sara' uguale e contrario a quello della forza elastica.

ANCORA UN ESEMPIO DI LAVORO

Supponiamo di dover tirare un corpo fermo alla base di un piano inclinato, con velocita' costante. Supponiamo che tra piano e corpo ci sia attrito e che il coefficiente $\mu_d = 0.3$, e che la massa del corpo sia $m = 1\ kg$. Che forza dovremo applicare e quale lavoro faremo se l'inclinazione del piano e' $\alpha = 45^o$ e la sua lunghezza e' di $d = 10\ m$? (filo inestensibile di massa trascurabile)



NOTARE CHE: la fune ha il solo scopo di trasmettere le forze, quindi la forza $\vec{F}$ con cui si tira puo' essere immaginata come applicata direttamente al corpo.

Dato che la velocita' del corpo deve essere costante, $\vec{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$, e di conseguenza $\sum_{\mathbf{i}} \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{i}} = \mathbf{0} \ \rightarrow\ \vec{\mathbf{F}} + \vec{\mathbf{N}} + \vec{\mathbf{P}} = \mathbf{0}$.

Proiettando sull'asse y troviamo

$$0 = N - mg\ cos\ \theta\ \rightarrow\ N = mg\ cos\ \theta,$$

e sull'asse x

$$0 = F - mg\ \ sen\ \theta - \mu_d\ N\ \rightarrow\ F = mg\,(\ sen\ \theta + \mu_d\ \ cos\ \theta)$$

F e' dunque la forza che dobbiamo applicare per tirare su il corpo a velocita' costante. $\vec{F}$ diretta nello stesso verso dello spostamento, quindi l'angolo tra i due e' zero e il coseno vale 1; inoltre la forza e' costante, il lavoro sara' dunque

$$\mathbf{L_{AB} = F\ d = mg\,(\ sen\ \theta + \mu_d\ cos\ \theta)\ \ d}$$

Ora sostituiamo i numeri ricordando che $sen45^o = cos45^o = 0.717$

$$\begin{cases} F = mg\,(\ sen\ \theta + \mu_d\ cos\ \theta) = 9.01N \\ L_{AB} = F\ d = 9.01\ N \times 10m = 90.1\ J \end{cases}$$

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA (o delle FORZE VIVE)

Quando un corpo e' in movimento possiede un' **ENERGIA CINETICA.** Se il corpo e' puntiforme, essa e' cosi' definita

$$\mathbf{E_c = \frac{1}{2} M v^2}$$

come il lavoro, l'energia cinetica e' **una grandezza SCALARE.**

Inoltre e' sempre **POSITIVA** e ha le seguenti dimensioni

$$[\mathbf{E_c}] = [\mathbf{m\ v^2}] \ = \ [\mathbf{m\ l^2\ t^{-2}}],$$

cioe' ha **le stesse dimensioni del lavoro**. Questo fatto suggerisce che tra le due grandezze debba esserci una relazione.

Dimostriamo ora che infatti questa relazione esiste, ed e'

$$\mathbf{L_{AB} = \Delta E_c \ \rightarrow \ L_{AB} = E_{c\ B} - E_{c\ A}}$$

vale a dire

Il lavoro fatto dalle forze che agiscono su un corpo e' pari alla variazione della sua energia cinetica

Partiamo dalla definizione di lavoro e sostituiamo alla forza l'espressione

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt},$$

e allo spostamento l'espressione $\quad d\vec{s} = \vec{v}\ dt$

$$L_{AB} = \int_A^B\ \vec{F}\cdot d\vec{s} = m\int_A^B\ \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\ dt\right)$$

Notiamo ora che

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right) = \vec{v}\ \cdot\ \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt}\ \cdot\ \vec{v}.$$

Dato che il prodotto scalare e' commutativo ($\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$) ne segue che $\quad\vec{v}\ \cdot\ \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt}\ \cdot\ \vec{v}$, quindi

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right) = 2\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\ \cdot\ \vec{v}\right).$$

Il termine che compare nell'integrale e' dunque uguale a

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right)\ \rightarrow\ \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v^2)$$

quindi $\quad L_{AB}\ $ puo' essere scritto come

$$L_{AB} = m\int_A^B\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v^2)\ dt = \frac{1}{2}\ m\int_A^B\ d\ v^2 = \frac{1}{2}\ m\ v_B^2 - \frac{1}{2}\ m\ v_A^2,$$

e cioe'

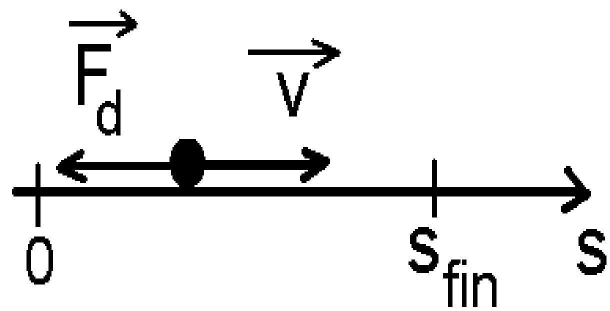
$$\mathbf{L_{AB} = \Delta E_c}$$

QED

UN ESEMPIO

Il teorema dell'energia cinetica e' utile in particolare quando si conosce la variazione di velocita' di un corpo e se ne vuole conoscere la posizione (o viceversa).

Per esempio, supponiamo che un corpo scivoli su un piano e che ci sia attrito tra corpo e piano. Sia $v(0) = v_0 = 20\ m/s$ la velocita' iniziale del corpo e $\mu_d = 0.1$ il coefficiente di attrito. Si calcoli quanto spazio percorre il corpo prima di fermarsi.



$$L_{AB} = \frac{1}{2}\, m\, v_B^2 - \frac{1}{2}\, m\, v_A^2$$

Ricordando che la forza d'attrito e' pari a $F_d = \mu_d\, N$ e che $N = mg$, si ha che

$$F_d = \mu_d\, mg.$$

F_d e' costante e diretta in verso opposto alla direzione del moto, quindi

$$L = \int_0^{s_{fin}} \vec{F} \cdot \vec{ds} = -\mu_d\, mg\, s_{fin}$$

quindi

$$-\mu_d\, mg\, s_{fin} = 0 - \frac{1}{2}\, m\, v_0^2$$

da cui

$$s_{fin} = \frac{v_0^2}{2g\ \mu_d} = \frac{(20)^2}{2 \times 9.8 \times 0.1} = 204.1\ m$$

POTENZA

La potenza e' il lavoro fatto nell'unita' di tempo, quindi e' una misura della velocita' con cui si fa lavoro e si trasferisce energia:

$$\mathbf{W} = \frac{\mathbf{dL}}{\mathbf{dt}}$$

Dato che

$$L = \int \vec{F} \cdot \vec{ds} \ \rightarrow \ dL = \vec{F} \cdot \vec{ds},$$

essendo $\vec{ds} = \vec{v}\ dt$,

$$W = \frac{dL}{dt} = \vec{F} \ \cdot \ \vec{v}$$

ATTENZIONE: la POTENZA e' una grandezza SCALARE

Le dimensioni della potenza sono

$$[\mathbf{W}] = [\mathbf{L}]/[\mathbf{t}] \ = \ \mathbf{m\ l^2\ t^{-3}}$$

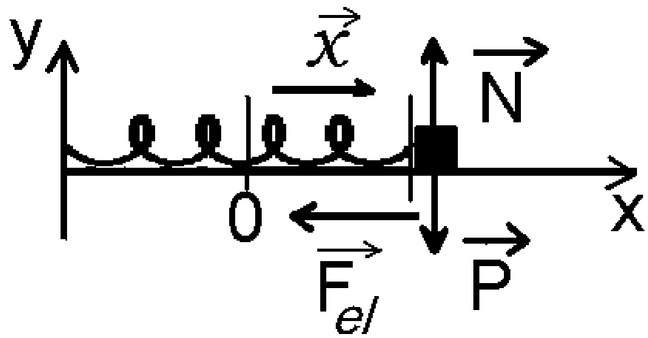
L' unita' di misura e' il **Watt** , pari a

$$1\ Watt = \mathbf{1\ Joule/s}$$

A volte si usa il **Kilowattora**, che e' una misura di lavoro, e non di potenza; infatti e' il lavoro fatto da una data forza in un'ora.

MOTO ARMONICO

Discutiamo le caratteristiche del moto armonico utilizzando il seguente esempio: un corpo di massa $\mathbf{m}$ e' attaccato a una molla, di massa trascurabile e costante elastica $\mathbf{k}$, vincolata a una parete. All'istante $t = 0$ la molla viene allungata di un tratto $\mathbf{x_0}$ e viene poi rilasciata con velocita' iniziale nulla, $\mathbf{v_x(0) = 0}$.



Nella direzione y agiscono la reazione vincolare, $\vec{N}$ e la forza peso. Sono uguali e opposte, quindi $a_y = 0$. Nella direzione x agisce la forza elastica $\mathbf{F_{el} = k\ x}$, diretta in verso opposto a quello del vettore $\vec{\mathbf{x}}$ che rappresenta l'allungamento(o l'accorciamento) rispetto alla lunghezza a riposo. Proiettando la seconda legge della meccanica sull'asse x, abbiamo quindi

$$\begin{cases} m\ a_x = -kx \\ x(0) = x_0 \\ v_x(0) = 0 \end{cases}$$

Notare che l'accelerazione in questo caso non e' una funzione del tempo ma della posizione, quindi non puo' essere integrata direttamente per ottenere velocita' e equazione oraria. COME FARE?

$$\begin{cases} m\ a_x = -kx \\ x(0) = x_0 \\ v_x(0) = 0 \end{cases}$$

Dato che

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad \text{e} \quad v_x = \frac{dx}{dt} \ \rightarrow \ a_x = \frac{d^2x}{dt^2},$$

possiamo riscrivere l'equazione nella forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}\ x,$$

e cioe'

$$\mathbf{\frac{d^2x}{dt^2} = -cost\ x},$$

dove $\quad cost = \dfrac{k}{m}$.

Ogni volta che si ha un'equazione in cui la derivata seconda di una funzione e' uguale a **meno** la funzione stessa, moltiplicata per una costante, la sua soluzione e' un **moto armonico**

$$x(t) = \mathbf{A}\ cos\ \ (\boldsymbol{\omega} t + \boldsymbol{\phi}) \tag{5}$$

dove $\mathbf{A}$ e $\boldsymbol{\phi}$ sono due costanti che dipendono dalle **condizioni iniziali**, mentre, come ora vedremo, $\boldsymbol{\omega}$ e' legata alla **costante** che compare nell'equazione, cioe' dipende dal particolare sistema che consideriamo. Verifichiamo che la (5) sia soluzione dell'equazione del moto armonico sostituendola direttamente. A tale scopo calcoliamone la derivata prima e seconda

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\boldsymbol{\omega}\ \mathbf{A}\ sen\ \ (\boldsymbol{\omega} t + \boldsymbol{\phi})\,, \\ \frac{d^2x}{dt^2} = -\boldsymbol{\omega}^2\ \mathbf{A}\ cos\ \ (\boldsymbol{\omega} t + \boldsymbol{\phi}) = -\boldsymbol{\omega}^2\ x \end{cases}$$

quindi la derivata seconda di x e' pari a meno $\boldsymbol{\omega}^2$ volte x.

equazione del moto armonico $\quad \mathbf{\frac{d^2x}{dt^2} = -cost\ x,}$

soluzione presunta $\quad x(t) = \mathbf{A}\ cos\ \ (\boldsymbol{\omega} t + \boldsymbol{\phi})$

derivata seconda $\quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\boldsymbol{\omega}^{\mathbf{2}}\ x$

Sostituendo la derivata seconda nell'equazione del moto armonico troviamo

$$-\boldsymbol{\omega}^{\mathbf{2}}\ x = -cost\ x \ \rightarrow\ \boldsymbol{\omega} = \sqrt{cost}$$

Quindi

$$x(t) = \mathbf{A}\ cos\ \ (\boldsymbol{\omega} t + \boldsymbol{\phi})$$

e' soluzione dell'eq.

$$\mathbf{\frac{d^2x}{dt^2} = -cost\ x,}$$

se $\ \boldsymbol{\omega} = \sqrt{\mathbf{cost}}$.

$\boldsymbol{\omega}$ viene detta **PULSAZIONE**.

Nel caso della molla $\quad \mathbf{\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}\ x,}$

$$\boldsymbol{\omega} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Per trovare le due costanti $\ \mathbf{A}\ $ e $\ \boldsymbol{\phi}$, dobbiamo utilizzare le condizioni iniziali.

equazione del moto armonico $\quad \mathbf{\frac{d^2x}{dt^2} = -cost\ x,}$

soluzione $\quad x(t) = \mathbf{A}\ cos\ (\boldsymbol{\omega} t + \boldsymbol{\phi}) \quad \text{con} \quad \boldsymbol{\omega} = \sqrt{cost}$

Calcoliamo la derivata di $\quad x(t)$

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -\boldsymbol{\omega}\ \mathbf{A}\ sen\ (\boldsymbol{\omega} t + \boldsymbol{\phi})\,,$$

e calcoliamo $x(t)$ e $v_x(t)$ all'istante $t = 0$

$$\begin{aligned} x(0) &= \mathbf{A}\ cos\ (\boldsymbol{\phi}) \\ v_x(0) &= -\boldsymbol{\omega}\ \mathbf{A}\ sen\ (\boldsymbol{\phi})\,. \end{aligned}$$

Ora dobbiamo imporre le condizioni iniziali, che nel caso dell'esempio della molla sono:

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \\ v_x(0) = 0. \end{cases}$$

quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\ cos\ (\boldsymbol{\phi}) = x_0 \\ -\boldsymbol{\omega}\ \mathbf{A}\ sen\ (\boldsymbol{\phi}) = 0. \end{aligned}$$

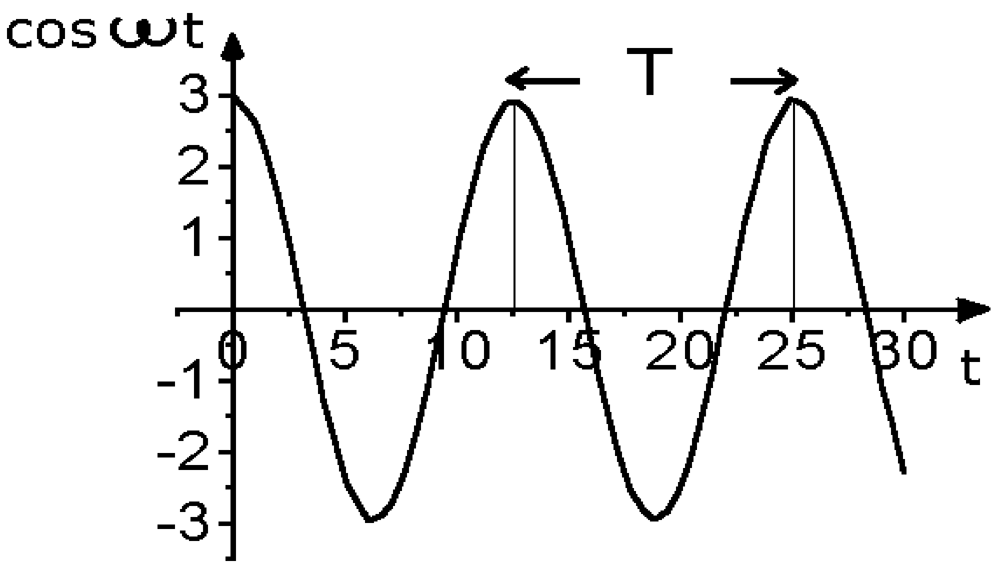
Dalla seconda ricaviamo che $\quad sen\ (\boldsymbol{\phi}) = 0, \quad$ cioe' $\quad \boldsymbol{\phi} = 0.\quad$ Di conseguenza, la prima equazione diventa

$$\mathbf{A} = x_0$$

In conclusione, l'equazione oraria che descrive il moto armonico della molla e'

$$x(t) = \mathbf{x_0}\ cos\ \left(\sqrt{\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}}}t\right).$$

$$x(t) = \mathbf{x_0} \; cos \; \left(\sqrt{\mathbf{cost}} \; t \right).$$



Definiamo

PERIODO

il tempo impiegato a compiere un'oscillazione completa, cioe'

$$\boldsymbol{\omega}\mathbf{T} = 2\pi \;\; \rightarrow \;\; \mathbf{T} = \frac{2\pi}{\boldsymbol{\omega}}$$

e nel caso della molla

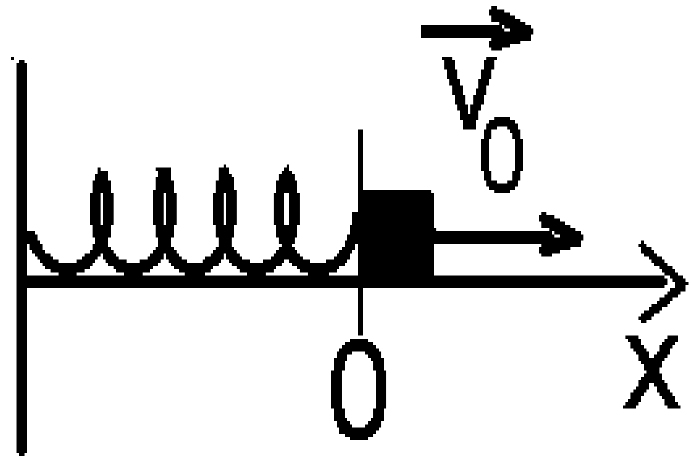
$$\mathbf{T} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}}}}$$

Definiamo

FREQUENZA

l'inverso del periodo

$$\nu = \frac{1}{\mathbf{T}}$$



Supponiamo che le condizioni iniziali siano diverse da quelle imposte prima, per esempio

$$\begin{cases} m\ a_x = -kx \\ x(0) = 0 \\ v_x(0) = v_0 \end{cases}$$

cioe' all'istante iniziale la massa e' nell'origine e le viene impartita una velocita' iniziale v_0. Cosa cambia nella soluzione? Il valore di $\boldsymbol{\omega}$ non cambia, perche' non dipende dalle condizioni iniziali; cambiano invece $\mathbf{A}$ e $\boldsymbol{\phi}$; infatti avremo

$$\begin{aligned} x(0) &= \mathbf{A}\ cos\ (\boldsymbol{\phi}) = 0 \\ \frac{dx}{dt}(t=0) &= -\boldsymbol{\omega}\ \mathbf{A}\ sen\ (\boldsymbol{\phi}) = v_0, \end{aligned}$$

Dalla prima ricaviamo che $cos\ (\boldsymbol{\phi}) = 0$, cioe' $\boldsymbol{\phi} = \pi/2$. Di conseguenza, la seconda equazione diventa

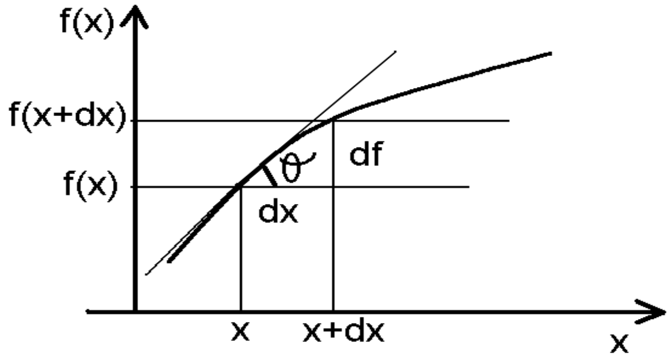
$$-\boldsymbol{\omega}\ \mathbf{A} = v_0 \ \rightarrow\ \mathbf{A} = \frac{v_0}{\boldsymbol{\omega}}$$

In conclusione, in questo caso l'equazione oraria che descrive il moto armonico della molla e'

$$x(t) = \frac{\mathbf{v_0}}{\boldsymbol{\omega}}\ cos\ \left(\sqrt{\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}}}\ t + \frac{\pi}{2}\right)\ \rightarrow\ x(t) = \frac{\mathbf{v_0}}{\boldsymbol{\omega}}\ sen\ \left(\sqrt{\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}}}\ t\right)$$

DIFFERENZIALE DI UNA FUNZIONE

Sia data la funzione $\mathbf{f(x)}$ graficata in figura



$$\mathbf{df = f(x + dx) - f(x)}$$

La variazione **df** della funzione tra i punti $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x + dx}$, che chiamiamo **differenziale** e', a meno di infinitesimi di ordine superiore, uguale a

$$\mathbf{df = dx \ tan\ \theta.}$$

Per calcolare df devo dunque calcolare $tan\ \theta$. Ma questo e' possibile, perche' sappiamo che $tan\ \theta$ e' la derivata di $f(x)$, cioe' $\mathbf{tan}\ \theta = \dfrac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}}$,

$$\mathbf{df} = \left(\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}}\right)\mathbf{dx}.$$

Questo concetto si generalizza immediatamente se $\mathbf{f}$ e' una funzione di piu' variabili, per esempio $\mathbf{f(x, y)}$. In tal caso la sua variazione quando si va dal punto $\mathbf{P} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ al punto $\mathbf{P'} = (\mathbf{x + dx}, \mathbf{y + dy})$ e' data dalla somma delle variazioni rispetto alle due coordinate

$$\mathbf{df} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)\mathbf{dx} + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}\right)\mathbf{dy}$$

dove $\left(\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)$ e' calcolata tenendo fisso $\mathbf{y}$ e $\left(\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}\right)$ e' calcolata tenendo fisso $\mathbf{x}$. Si usa il simbolo ∂, proprio per indicare che si sta facendo la **derivata parziale** della funzione rispetto a una delle variabili, tenendo costanti le altre.

ESEMPI

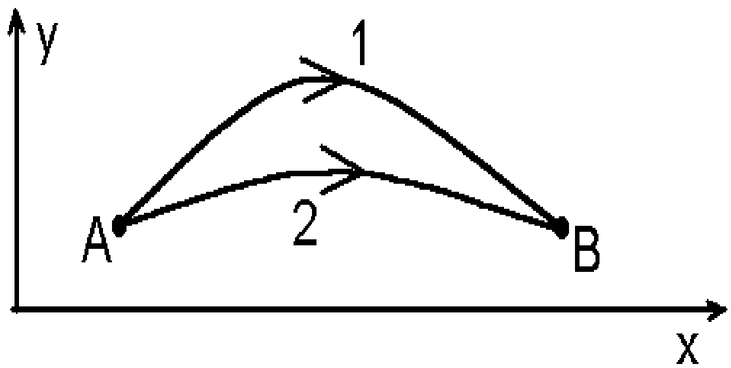
- $f(x) = 3x^3 + x^2 + 2;$

  calcoliamo la derivata
  $$\frac{df}{dx} = 9x^2 + 2x$$
  quindi il differenziale e'
  $$df = \left(9x^2 + 2x\right) dx.$$

- $f(x, y) = 2x^2 + 5y^2 + 3x;$

  calcoliamo le derivate parziali rispetto a x e y
  $$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + 3, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 10y$$
  quindi
  $$df = (4x + 3)\, dx + (10y)\, dy.$$

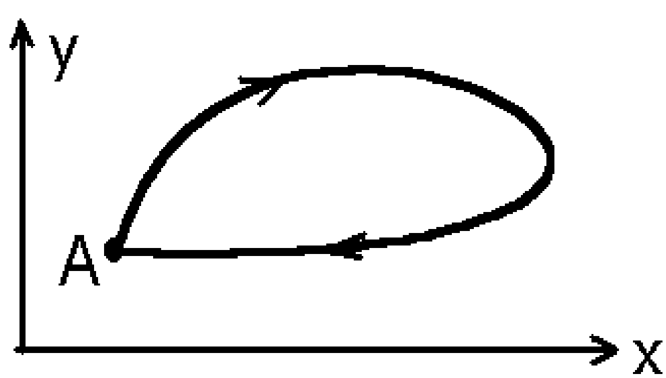
IMPORTANTE: l'integrale del differenziale di una funzione tra i punti A e B e' uguale alla funzione calcolata in B meno la funzione calcolata in A, cioe' e' uguale alla **variazione** della funzione tra A e B



$$\int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \mathbf{df} = \mathbf{f(B) - f(A)}$$

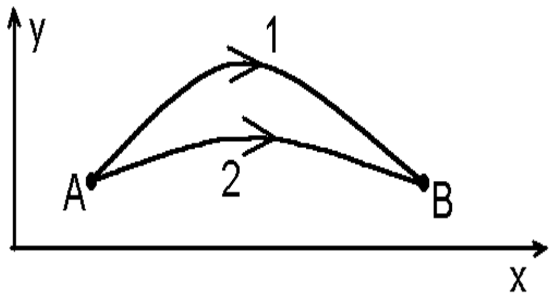
INOLTRE:l'integrale del differenziale di una funzione su un ciclo, cioe' su un percorso chiuso che parte da A e termina in A, e' zero

$$\int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{A}} \mathbf{df} = \mathbf{f(A) - f(A) = 0}$$



FORZE CONSERVATIVE

Una forza si dice conservativa quando il lavoro che fa per spostare un punto materiale da A a B non dipende dal percorso, ma solo dalla posizione iniziale e finale.

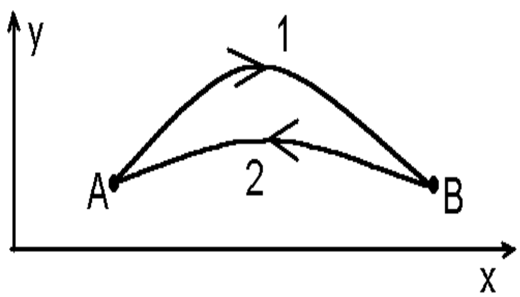


$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{ds}$$

per es. presi due percorsi qualsiasi tra A e B

$$L_{AB}(lungo\mathbf{1}) = L_{AB}(lungo\mathbf{2})$$

Questo implica che se la forza e' conservativa, il lavoro su un ciclo e' zero; infatti



$$L_{AB}(lungo\mathbf{1}) = -L_{BA}(lungo\mathbf{2})$$

quindi

$$L_{AB}(lungo\mathbf{1}) + L_{BA}(lungo\mathbf{2}) = 0.$$

Quindi possiamo anche dire che **una forza e' conservativa quando il lavoro che essa compie in un ciclo e' nullo.**

Da quanto detto sui differenziali segue che, se la forza e' conservativa, $\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{ds}}$ deve essere il differenziale di una funzione, che chiameremo $-\mathbf{U}$ (la ragione del segno meno si capira' tra breve), cioe'

$$\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{ds}} = -\mathbf{dU};$$

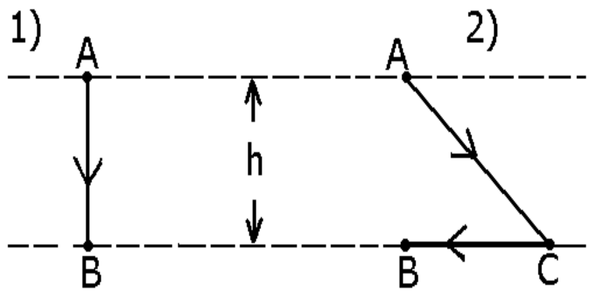
La funzione $\mathbf{U}$ e' **l'ENERGIA POTENZIALE**.

In conclusione, **se la forza e' conservativa il lavoro che essa compie tra A a B e' uguale a meno la variazione di energia potenziale**

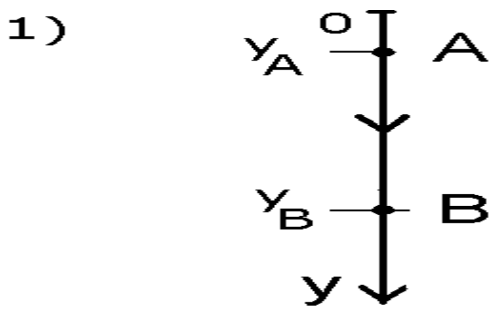
$$\mathbf{L_{AB}} = \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{ds}} = -\mathbf{\Delta U} \qquad \text{cioe'} \qquad \mathbf{L_{AB}} = \mathbf{U(A)} - \mathbf{U(B)}.$$

ESEMPI DI FORZE CONSERVATIVE

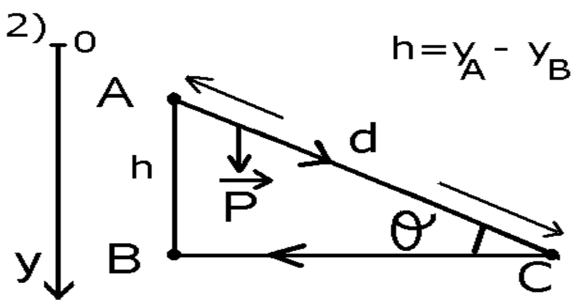
- $\vec{p} = m\vec{g}$



Supponiamo che un grave venga spostato dal punto A al punto B seguendo due diversi cammini. Calcoliamo il lavoro fatto dalla forza peso.



$$L^{(1)}_{AB} = \int_A^B \; m\vec{g} \cdot \vec{ds}$$
$$= \int_{y_A}^{y_B} \; mg \; dy = mg\,(y_B - y_A)$$



In questo caso

$$L^{(2)}_{AB} = L_{AC} + L_{CB}.$$

$L_{CB} = 0$ perche' lungo BC forza e spostamento sono perpendicolari.

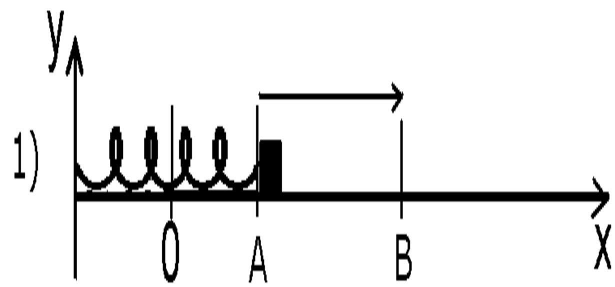
Lungo il tratto AC

$$L_{AC} = \int_A^C \; mg \; ds \; cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = mgd \; sen\;\theta = mg\,(y_B - y_A)$$

Quindi nonostante i percorsi siano diversi, il lavoro compiuto dalla forza peso e' lo stesso. Si puo' verificare che questo e' vero per qualsiasi percorso tra A a B. Concludiamo che la forza peso e' conservativa.

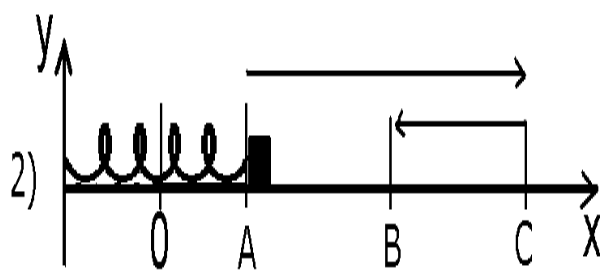
- $\vec{F}_{el} = -\mathbf{k}\vec{x}$

Supponiamo che un corpo di massa **m** attaccato a una molla di costante elastica **k** e massa trascurabile, venga spostato dal punto A al punto B seguendo i due diversi cammini riportati sotto. Calcoliamo il lavoro fatto dalla forza elastica nei due casi (ricordiamo che la forza elastica e' sempre diretta in verso opposto allo spostamento)



$$L_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} \vec{F} \cdot \vec{ds} = -\int_{x_A}^{x_B} kxdx = -\frac{1}{2}kx_B^2 + \frac{1}{2}kx_A^2$$

Supponiamo ora che la massa **m** venga portata da A a C e poi da C a B



In questo caso il lavoro totale sara' $L_{AB} = L_{AC} + L_{CB}$

$$\begin{cases} L_{AC} = -\int_{x_A}^{x_C} kxdx = -\frac{1}{2}kx_C^2 + \frac{1}{2}kx_A^2 \\ L_{CB} = -\int_{x_C}^{x_B} kxdx = -\frac{1}{2}kx_B^2 + \frac{1}{2}kx_C^2 \end{cases} \rightarrow L_{AB} = -\frac{1}{2}kx_B^2 + \frac{1}{2}kx_A^2$$

Quindi anche il lavoro della forza elastica non dipende dal percorso, ma solo dagli estremi, pertanto la forza elastica e' conservativa.

COME SI CALCOLA L'ENERGIA POTENZIALE?

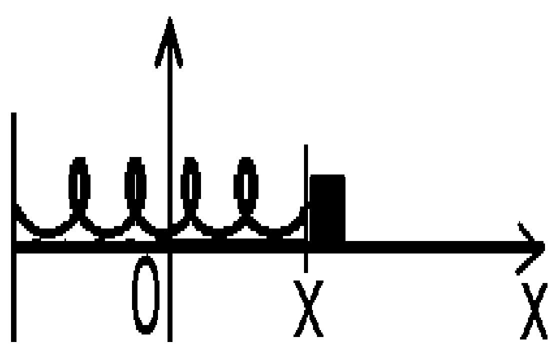
Data una forza conservativa, l'equazione che ci permette di calcolare l'energia potenziale e'

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{ds} = -\left[U(B) - U(A)\right].$$

Questa equazione dice che se vogliamo sapere qual e' **la variazione di energia potenziale** tra i punti A e B, dobbiamo calcolare il lavoro che la forza conservativa farebbe per spostare un punto materiale da A a B.

Attenzione: con questo sistema possiamo calcolare solo differenze di energia potenziale, ma come vedremo, sono solo quelle che ci interessano. Quindi in pratica fisseremo una posizione di riferimento, e calcoleremo differenze di energia rispetto a quella.

Per esempio, consideriamo il caso della forza elastica, e fissiamo come livello di riferimento rispetto a cui calcolare l'energia potenziale la posizione $x = 0$ (molla a riposo).

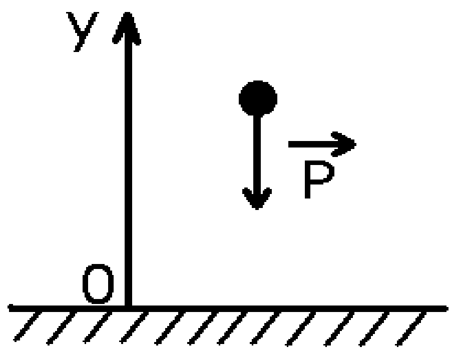


Il lavoro fatto dalla forza per portare il corpo dalla posizione $x = 0$ alla generica posizione x e'

$$L_{0x} = -\int_0^x kx dx = -\frac{1}{2}kx^2 \qquad \text{quindi}$$

$$-\left[U(x) - U(0)\right] = -\frac{1}{2}kx^2 \rightarrow \mathbf{U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + U(0)}$$

In maniera analoga possiamo calcolare l'energia potenziale del campo gravitazionale nelle vicinanze della terra.
Abbiamo visto prima che qualsiasi sia il percorso seguito per andare da A a B, il lavoro fatto dalla forza peso e' sempre uguale a mg $\times$ (differenza di quota) tra la posizione finale e iniziale.
Inoltre e' positivo se il corpo cade, negativo (resistente) se sale.
Se fissiamo come livello di riferimento la superficie della terra, che porremo a $y = 0$, e supponiamo che il grave parta da una quota y,



il lavoro fatto dalla forza peso per portare il grave da y a $y = 0$ sara'

$$L_{y0} = mgy, \quad \rightarrow \quad -[U(0) - U(y)] = mgy$$

quindi

$$\mathbf{U(y) = mgy + U(0)}$$

Come si vede da questi esempi, l'energia potenziale e' definita **a meno di una costante**, che e' il valore che essa ha al livello che si prende come riferimento.
Ricordiamo inoltre che l'energia potenziale ha le stesse dimensioni del lavoro, cioe' $\mathbf{[U] = ml^2t^{-2}}$.

APRIAMO UNA PARENTESI.

Nella pagina precedente abbiamo parlato di **campo gravitazionale**.
Cosa significa?
innanzi tutto distinguiamo:

campo scalare

in una regione di spazio, o in tutto lo spazio, esiste un campo scalare quando, in ogni punto esiste, ed e' definita, una grandezza scalare. Per esempio in una stanza c'e' un campo di temperatura; essa puo' essere la stessa in tutti i punti, se non ci sono sorgenti di calore, o variare da punto a punto (per esempio se c'e' un camino)

Campo vettoriale

in una regione di spazio, o in tutto lo spazio, esiste un campo vettoriale quando, in ogni punto esiste ed e' definita una grandezza vettoriale. Per esempio parliamo di campo gravitazionale della terra perche' un corpo di massa **m**, posto in un punto qualsiasi dello spazio, sara' soggetto alla forza di attrazione gravitazionale esercitata dalla terra. Ovviamente la forza sara' tanto piu' intensa quanto minore e' la distanza dalla terra.

Torneremo in seguito sul concetto di campo. Per ora accontentiamoci di questa definizione.

Finora abbiamo incontrato due equazioni che descrivono come il lavoro fatto da una forza venga convertito in energia:

$$\mathbf{1}) \qquad L_{AB} = \Delta E_c,$$

che mostra la relazione tra lavoro e energia cinetica ($\mathbf{E_c = \frac{1}{2}mv^2}$) Ricordiamo che questa legge vale **SEMPRE**, qualsiasi sia la forza in questione.

$$\mathbf{2}) \qquad L_{AB} = -\Delta U.$$

Questa equazione, a differenza della precedente, **vale solo se la forza e' CONSERVATIVA**. Essa mostra come il lavoro fatto da una forza conservativa sia equivalente a una variazione di energia potenziale.

Se siamo in presenza di forze conservative queste due leggi valgono simultaneamente

$$\begin{cases} L_{AB} = \Delta E_c \\ L_{AB} = -\Delta U \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \Delta E_c = -\Delta U$$

$$\Downarrow$$

$E_c(B) - E_c(A) = -U(B) + U(A)$ cioe' $E_c(B) + U(B) = E_c(A) + U(A)$

La somma dell'energia cinetica + energia potenziale e' detta

energia meccanica

$$\mathbf{E} = \mathbf{E_c} + \mathbf{U}.$$

Essendo gli stati A e B del tutto generici, l'equazione

$$E_c(B) + U(B) = E_c(A) + U(A)$$

esprime dunque

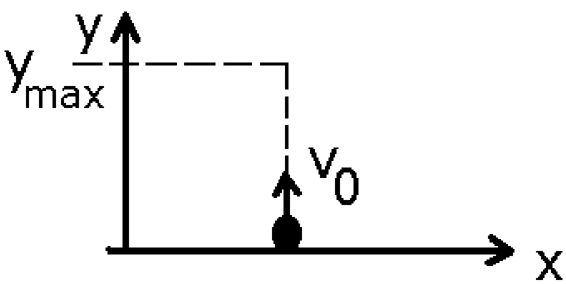
LA LEGGE DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

IN UN CAMPO DI FORZE CONSERVATIVO L'ENERGIA MECCANICA SI CONSERVA

$$E_c(B) + U(B) = E_c(A) + U(A) \;\rightarrow \qquad E = cost$$

Vale a dire: un dato corpo avra' un'energia cinetica che gli deriva dal fatto che si muove con una certa velocita', e un'energia potenziale che gli deriva dal fatto che occupa una certa posizione in presenza di una forza conservativa. Man mano che il corpo si muove, una delle due forme di energia puo' diminuire e l'altra aumentare, ma la loro somma **deve rimanere costante**.

ESEMPIO: Lanciamo una palla dal livello del suolo, con velocita' iniziale v_0, e vediamo a che quota si ferma



Ricordiamo che l'energia potenziale gravitazionale e'

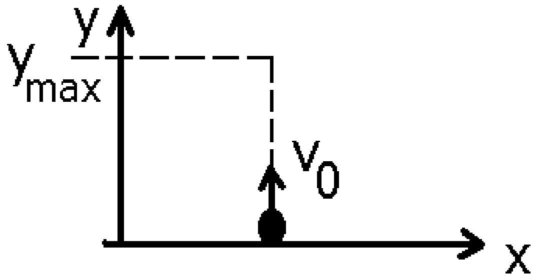
$$U(y) = mgy + U(0)$$

Se trascuriamo la resistenza dell'aria, che non e' una forza conservativa, possiamo applicare la legge di conservazione dell'energia meccanica tra lo stato iniziale (la palla viene lanciata), e lo stato finale (la palla raggiunge la massima quota con $v = 0$)

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + U(0) = mgy_{max} + U(0) + 0$$

da cui ricaviamo immediatamente $\mathbf{y_{max} = \frac{v_0^2}{2g}}$

Naturalmente allo stesso risultato si poteva arrivare applicando la seconda legge della dinamica $\vec{F} = m\vec{a}$, e ricavando le equazioni del moto; tuttavia e' piu' conveniente applicare la conservazione dell'energia quando si vogliano mettere in relazione **velocita' e posizione**.



Riscriviamo la conservazione dell'energia tra l'istante iniziale e un generico istante in cui la palla si trova alla quota y con velocita' v, e sta o salendo o scendendo

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + U(0) = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + U(0) \rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

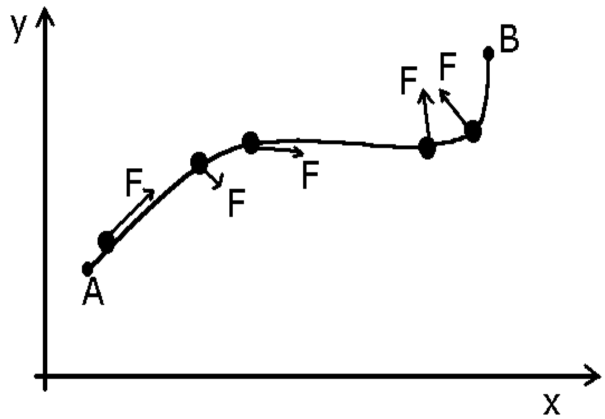
Una considerazione importante. Da questa equazione si vede che man mano che il corpo sale, siccome la sua energia potenziale aumenta, quella cinetica deve diminuire, perche' la loro somma deve rimanere costante e uguale a $\frac{1}{2}mv_0^2$.
L'energia potenziale diventa massima nel punto in cui il corpo si ferma per poi cominciare a ridiscendere: a questo punto tutta l'energia cinetica si e' trasformata in energia potenziale.
Nella fase di discesa, l'energia potenziale diminuisce e quella cinetica aumenta, fino a raggiungere il valore iniziale $\frac{1}{2}mv_0^2$ quando tocca il suolo.

Si capisce ora perche' abbiamo definito l'energia potenziale con il segno meno: questo ci consente di definire l'energia meccanica come somma delle due energie in modo tale che l'aumento di una avvenga a spese dell'altra e viceversa.

Si vede inoltre che la costante $U(0)$ non e' essenziale: nei bilanci energetici essa si semplifica.

Che relazione c'e' tra l'energia potenziale e la forza conservativa?

Supponiamo che un corpo si muova su un piano, sotto l'azione di una forza che dipende dalla posizione, cioe' $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$



Il lavoro della forza sara'

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{ds}$$

Abbiamo visto che in generale questo integrale dipende dal particolare percorso fatto per andare da A a B; tuttavia, se la forza e' conservativa esistera' la funzione **energia potenziale** tale che

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{ds} = -\int_A^B dU.$$

dove, per la definizione di differenziale

$$-\int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \mathbf{dU} = -\int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \left(\frac{\partial\, \mathbf{U}}{\partial\, \mathbf{x}}\right) \mathbf{dx} + \left(\frac{\partial\, \mathbf{U}}{\partial\, \mathbf{y}}\right) \mathbf{dy}$$

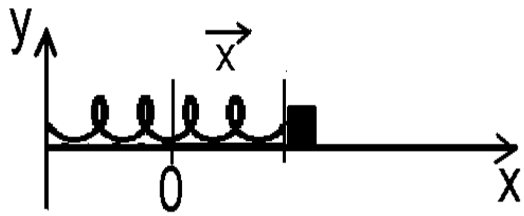
D'altra parte, svolgendo il prodotto scalare che compare nel lavoro si ha

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_A^B \mathbf{F_x} dx + \mathbf{F_y} dy,$$

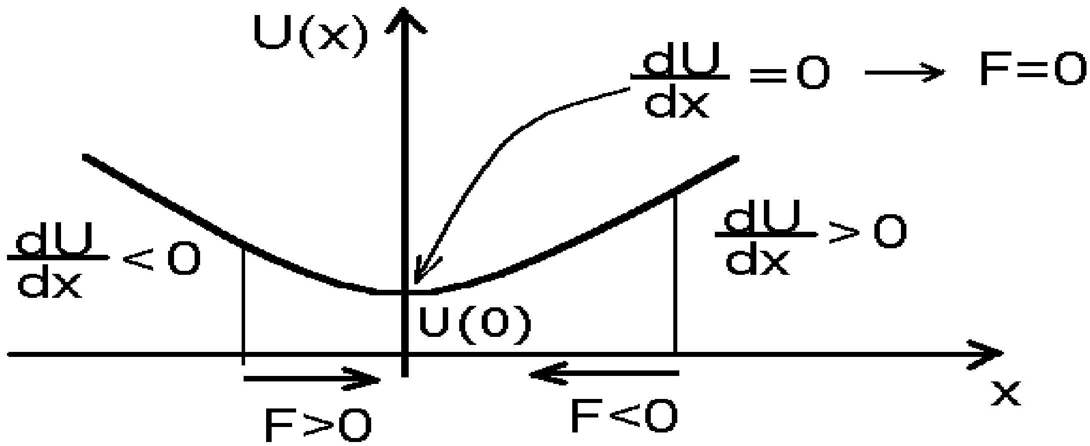
dove $\mathbf{F_x}$ e $\mathbf{F_y}$ sono le componenti della forza lungo l'asse x e y. Confrontando le due equazioni si vede che la relazione tra forza conservativa e energia potenziale e'

$$\mathbf{F_x} = -\frac{\partial\, \mathbf{U}}{\partial\, \mathbf{x}}, \qquad \mathbf{F_y} = -\frac{\partial\, \mathbf{U}}{\partial\, \mathbf{y}}.$$

Quali informazioni ricaviamo dal grafico dell'energia potenziale? Consideriamo ad esempio l'energia potenziale elastica



$$U(x) = -\frac{1}{2}kx^2 + U(0)$$



In questo caso l'energia potenziale e' funzione solo di x. Ricordiamo che la relazione tra la forza conservativa e l'energia potenziale e'

$$F = -\frac{dU}{dx},$$

e che il corpo si muove lungo l'asse x. Dal grafico si vede che

- Se **U** decresce, $\mathbf{\frac{dU}{dx} < 0 \;\rightarrow\; F > 0}$
  cioe' la forza ha lo stesso verso dell'asse x.
- Se **U** cresce, $\mathbf{\frac{dU}{dx} > 0 \;\rightarrow\; F < 0}$
  cioe' la forza ha verso opposto all'asse x.
- Se **U** ha un minimo, $\mathbf{\frac{dU}{dx} = 0 \;\rightarrow\; F = 0}$
  il valore di x per cui **U** ha un minimo e' una **posizione di equilibrio**.

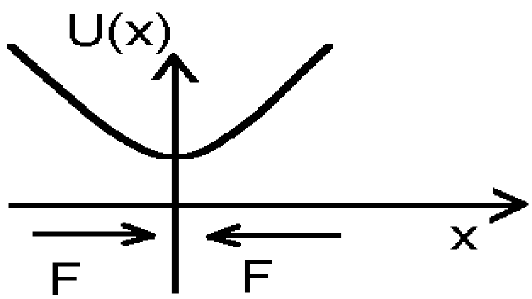
RIEPILOGANDO: $\mathbf{F} = -\dfrac{\mathbf{dU}}{\mathbf{dx}}$

Se **U** decresce, $\dfrac{\mathbf{dU}}{\mathbf{dx}} < \mathbf{0} \;\rightarrow\; \mathbf{F} > \mathbf{0}$

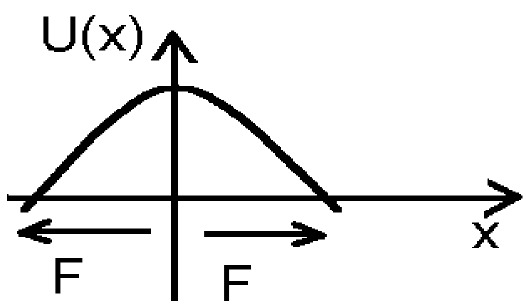
Se **U** cresce, $\dfrac{\mathbf{dU}}{\mathbf{dx}} > \mathbf{0} \;\rightarrow\; \mathbf{F} < \mathbf{0}$

Se **U** ha un minimo, un massimo, o un flesso
si ha un punto di equilibrio $\dfrac{\mathbf{dU}}{\mathbf{dx}} = \mathbf{0} \;\rightarrow\; \mathbf{F} = \mathbf{0}$

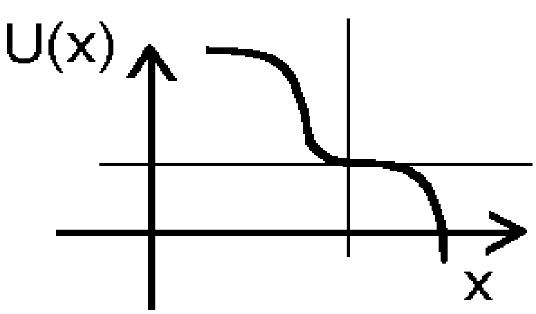
Distinguiamo i vari casi:



MINIMO: La posizione si dice di **equilibrio stabile**, perche' se si sposta il corpo verso destra o verso sinistra la forza tendera' a riportarlo nella posizione di equilibrio.

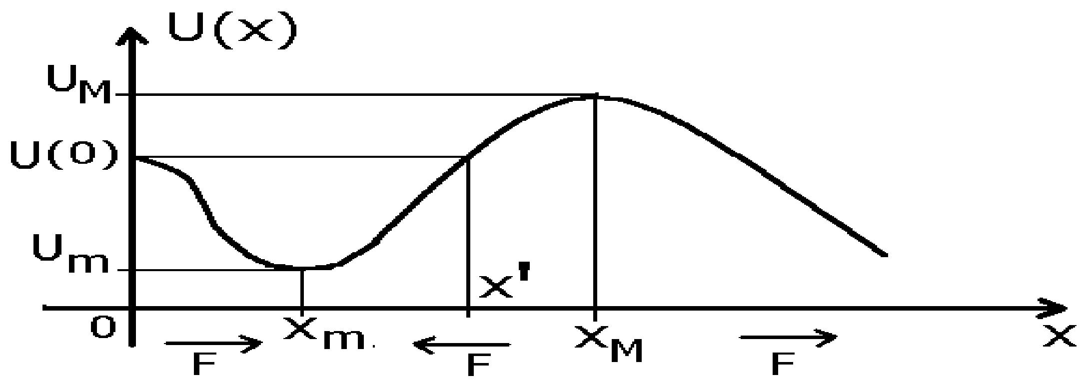


MASSIMO: La posizione si dice di **equilibrio instabile**, perche' se si sposta il corpo verso destra o verso sinistra la forza tendera' ad allontanarlo dalla posizione di equilibrio.



FLESSO: oltre alla derivata prima anche la derivata seconda si annulla:
$\dfrac{\mathbf{d^2U}}{\mathbf{dx^2}} = \mathbf{0} \;\rightarrow\; \dfrac{\mathbf{dF}}{\mathbf{dx}} = \mathbf{0}$
La posizione si dice di **equilibrio indifferente**, perche' per piccoli spostamenti rispetto a questa posizione la forza rimarra' uguale a zero.

Supponiamo che un corpo sia soggetto a forze conservative la cui energia potenziale abbia il seguente grafico



Poniamo il corpo, che e' vincolato a muoversi sull'asse x, in $\mathbf{x = 0}$. Che velocita' iniziale dobbiamo impartirgli affinche' riesca a superare il punto $\mathbf{x = x_M}$?

1) Supponiamo che la velocita' iniziale sia nulla: l'energia meccanica del corpo allora e'

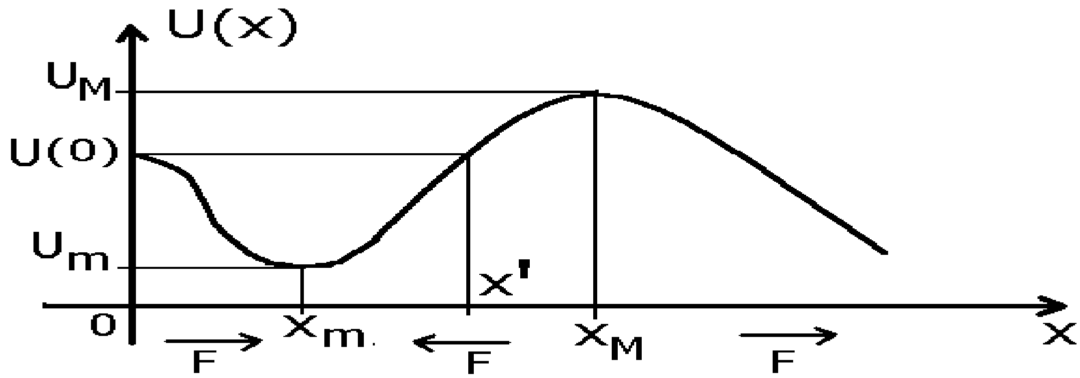
$$E = U(0)$$

Questa energia deve rimanere costante per tutto il moto. In $\mathbf{x = 0}$ il corpo e' soggetto a una forza che lo spinge verso $\mathbf{x_m}$, dove arrivera' con velocita' $\mathbf{v_m}$ tale che

$$U(0) = \frac{1}{2}mv_m^2 + U_m.$$

$\mathbf{x_m}$ e' una **posizione di equilibrio**, perche' la forza e' zero, pero'

ATTENZIONE: questo non vuol dire che il corpo si ferma!! Vuol solo dire che in quella posizione il corpo non subisce accelerazioni; quindi se ci arriva con una certa velocita'proseguira'; se invece venisse messo in $\mathbf{x_m}$ da fermo, allora rimarrebbe in quiete (prima legge della meccanica!)



Dato che il corpo arriva in $\mathbf{x_m}$ con velocita' $\mathbf{v_m}$, prosegue il suo moto, ma appena supera $\mathbf{x_m}$ la forza cambia verso e lo frena, fino a farlo fermare nel punto $\mathbf{x'}$ tale che la sua energia meccanica sia di nuovo uguale a quella iniziale $\mathbf{U(0)}$. A questo punto la forza lo accelera indietro riportandolo in $\mathbf{x = 0}$, dove arriva con velocita' nulla, e cosi' via. Dunque se $\mathbf{v_0 = 0}$ il corpo non arriva in $\mathbf{x_M}$.

2) Supponiamo che la velocita' iniziale sia $\mathbf{v_0 \neq 0}$. In questo caso il corpo avra' a disposizione un'energia meccanica maggiore

$$E = U(0) + \frac{1}{2} m v_0^2.$$

Questa energia deve rimanere costante per tutto il moto, quindi se vogliamo che il corpo arrivi in $\mathbf{x_M}$ e li' si fermi, dovra' essere tale che

$$U(0) + \frac{1}{2} m v_0^2 = U_M + 0$$

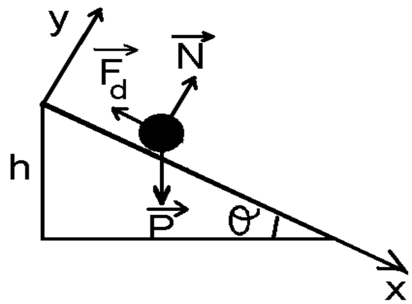
da cui

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = U_M - U(0)$$

l'energia cinetica iniziale deve essere pari alla differenza di energia potenziale tra la posizione iniziale e quella del massimo. Se l'energia cinetica impartita all'inizio e' leggermente maggiore, il corpo arrivera' in $\mathbf{x_M}$ con una piccola energia cinetica residua e superera' $\mathbf{x_M}$.

Si puo' scrivere una legge di conservazione dell'energia in presenza di forze non conservative?

Supponiamo ad esempio che un corpo scivoli su un piano inclinato e che ci sia una forza d'attrito $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{d}}$ tra il piano e corpo



In questo caso il lavoro totale compiuto dalle forze sara'

$$L_{tot} = L_{peso} + L_{reazione\ vinc.} + L_{attrito}$$

Dal teorema dell'energia cinetica, che vale **SEMPRE**, sappiamo che **il lavoro totale delle forze e' uguale alla variazione di energia cinetica,** $L_{tot} = \Delta E_c$, quindi

$$\Delta E_c = L_{peso} + L_{reazione\ vinc.} + L_{attrito}$$

- Il lavoro della reazione vincolare **N** e' nullo, perche' **N** e' perpendicolare allo spostamento.
- il lavoro della forza peso e' pari a meno la variazione di energia potenziale gravitazionale, perche' la forza e' conservativa $L_{peso} = -\Delta U_{grav}$.

Quindi scriveremo

$$\Delta E_c = -\Delta U_{grav} + L_{attrito} \quad \text{e cioe'} \quad \Delta E_c + \Delta U_{grav} = L_{attrito}$$

Questa e' una legge di conservazione dell'energia generalizzata. In pratica vediamo che una parte dell'energia meccanica (energia cinetica+ energia potenziale) deve essere utilizzata (dissipata) in lavoro dell'attrito.

SOMMARIO

- **Una forza si dice conservativa quando il lavoro che fa per spostare un punto materiale da A a B non dipende dal percorso, ma solo dalla posizione iniziale e finale o, equivalentemente, una forza e' conservativa quando il lavoro che essa compie in un ciclo e' nullo.**

- **se una forza e' conservativa, esiste una funzione che chiamiamo energia potenziale tale che**

  $$\mathbf{L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{ds} = -\Delta U} \qquad \text{cioe'} \qquad \mathbf{L_{AB} = U(A) - U(B).}$$

- L'**energia potenziale e' legata alla forza conservativa dalle relazioni**

  $$\mathbf{F_x = -\frac{\partial\, U}{\partial\, x}}, \qquad \mathbf{F_y = -\frac{\partial\, U}{\partial\, y}}, \qquad \mathbf{F_z = -\frac{\partial\, U}{\partial\, z}};$$

- **In presenza di forze conservative vale LA LEGGE DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA**

  $$\mathbf{\Delta E_c + \Delta U = 0}$$

  o equivalentemente

  $$\mathbf{E_c(B) + U(B) = E_c(A) + U(A)}$$

- **In presenza di forze conservative e non conservative**

  $$\mathbf{\Delta E_c + \Delta U = L_{forze\ non\ conservative}}$$

QUANTITA' DI MOTO

Dato un punto materiale di massa m e velocita' v, definiamo il vettore **quantita' di moto**

$$\vec{\mathbf{q}} = \mathbf{m}\vec{\mathbf{v}}$$

La **quantita' di moto** ha stessa direzione e stesso verso della velocita'.

Nota: in alcuni testi la quantita' di moto viene indicata con $\vec{\mathbf{p}}$. Noi la indicheremo con $\vec{\mathbf{q}}$ per evitare confusioni con la forza peso.

La seconda legge della meccanica $\vec{F} = m\vec{a}$ si puo' cosi' generalizzare:

La forza che agisce su un punto materiale e' uguale alla derivata della sua quantita' di moto

$$\vec{F} = \frac{d\vec{q}}{dt}\ ;$$

in questo modo si include la possibilita' che la massa del corpo possa cambiare; infatti

$$\vec{F} = \frac{d\vec{q}}{dt} \ \rightarrow \ \vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\,\vec{v} + m\,\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Si vede subito che se la massa e' costante $\frac{dm}{dt} = 0$ e questa equazione si riduce a $\vec{F} = m\vec{a}$.

Come vedremo tra breve, il concetto di quantita' di moto sara' particolarmente utile nello studio del moto di un sistema di punti materiali.

$$\mathbf{Se} \qquad \vec{\mathbf{F}} = \mathbf{0} \ \rightarrow \ \frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{q}}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{0} \ \rightarrow \ \vec{\mathbf{q}} = \mathbf{cost}$$

Se su un punto materiale non agiscono forze, o se agiscono forze la cui risultante e' nulla, la quantita' di moto rimane costante

L'IMPULSO DI UNA FORZA

Dalla seconda legge della meccanica scritta in funzione della quantita' di moto, si ricava la seguente relazione

$$\vec{F} = \frac{d\vec{q}}{dt} \;\rightarrow\; \vec{F}dt = d\vec{q};$$

quindi ogni volta che al punto materiale si applica una forza per un tempo infinitesimo dt, si avra' una variazione infinitesima della quantita' di moto $\vec{dq}$. Se la forza e' applicata al corpo per un intervallo finito di tempo Δt, sara' valida la relazione

$$\int_0^{\Delta t} \vec{F}dt = \int_{\vec{q}_{in}}^{\vec{q}_{fin}} d\vec{q} = \vec{q}_{fin} - \vec{q}_{in} = \Delta\vec{q}.$$

La quantita' $\int_0^{\Delta t} \vec{F}dt$ viene detta **IMPULSO** della forza

$$\vec{\mathbf{J}} = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{\Delta t}} \vec{\mathbf{F}}\mathbf{dt};$$

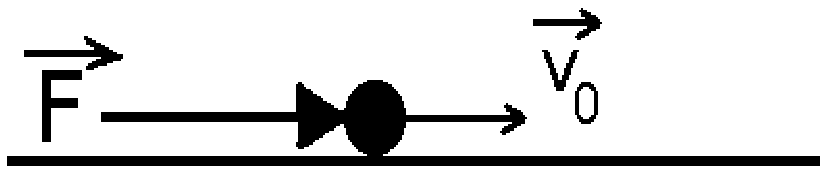
possiamo dunque dire che **l'impulso della forza che agisce su un punto materiale e' uguale alla variazione della sua quantita' di moto**

$$\vec{\mathbf{J}} = \mathbf{\Delta}\vec{\mathbf{q}}.$$

Essendo le dimensioni dell'impulso quelle di una forza per un tempo, l'unita' di misura sara' Newton×secondi.

ESEMPIO

A un punto materiale di massa $\mathbf{m = 1\ kg}$, che si muove con velocita' costante $\mathbf{v_0 = 3m/s}$, viene applicata, nella stessa direzione del moto, una forza variabile nel tempo $\mathbf{F(t) = at + b}$, con $a = 1\ N/s$ e $b = 2\ N$. Calcolare la velocita' del punto dopo 4 secondi.



Dall'equazione che lega impulso e quantita' di moto si ha

$$\vec{J} = \int_0^{\Delta t} \vec{F}\, dt = \Delta \vec{q}$$

Essendo la forza diretta come $\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{0}$, essa determinera' solo una variazione del modulo della velocita'; quindi

$$J = \Delta q \ \rightarrow \ J = mv_{fin} - mv_0 = m\Delta v.$$

La variazione di velocita' sara' dunque

$$\Delta v = \frac{J}{m}.$$

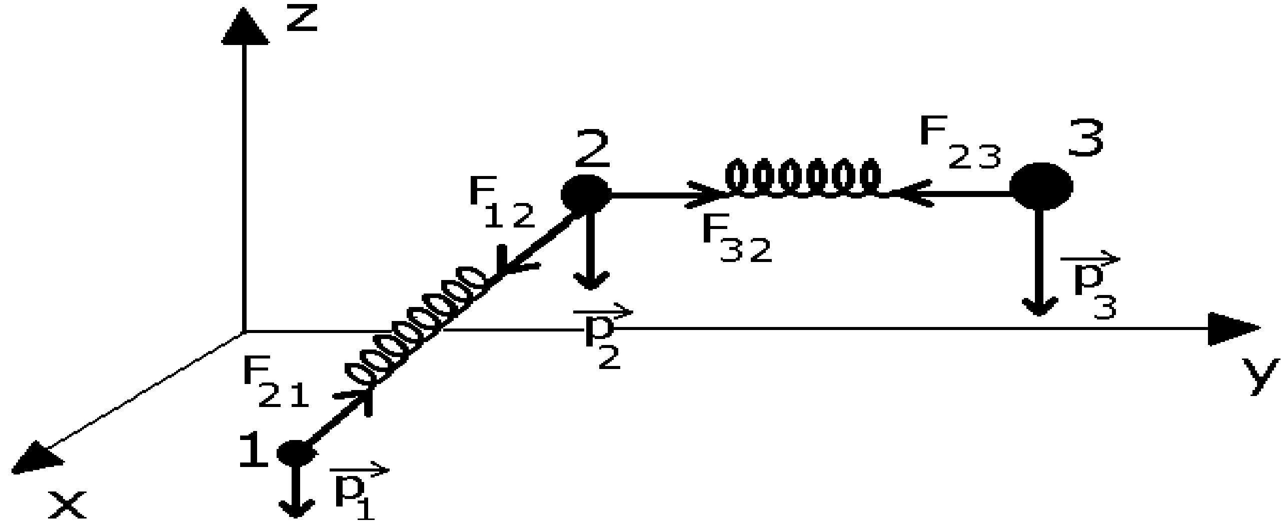
Calcoliamo il modulo dell'impulso

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\Delta t} F dt = \int_0^{\Delta t} (t+2)\, dt = \left[\frac{1}{2}t^2 + 2t\right]_0^{\Delta t} \\ &= \frac{1}{2}(\Delta t)^2 + 2(\Delta t) = \frac{1}{2}\,(4)^2 + 2 \times (4) = 16\ N \cdot s \end{aligned}$$

Quindi

$$\Delta v = \frac{16\ N \cdot s}{1\ kg} = 16\ m/s \ \rightarrow \ v_{fin} = v_0 + \Delta v = 3 + 16 = 19\ m/s.$$

Vogliamo descrivere il moto di un sistema di punti materiali soggetti a forze esterne e interne



Nell'esempio descritto in figura le forze esterne sono le forze peso agenti sui corpi di massa m_1, m_2 e m_3. Le forze interne sono le forze elastiche dovute alle molle che collegano le coppie (m_1, m_2) e (m_2, m_3). Siano $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$ e $\vec{q}_3$ le quantita' di moto dei tre corpi

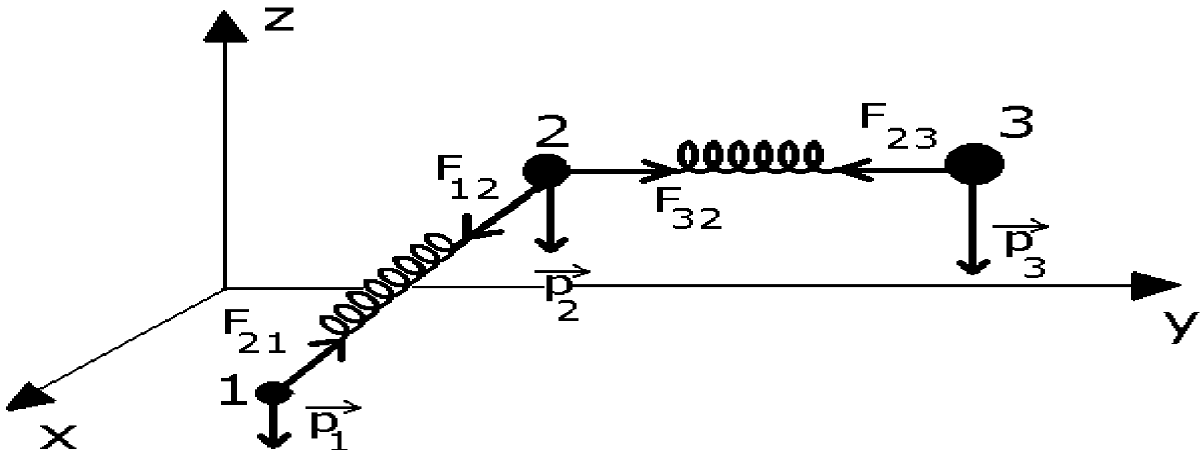
$$\vec{q}_1 = m_1\vec{v}_1, \qquad \vec{q}_2 = m_2\vec{v}_2, \qquad \vec{q}_3 = m_3\vec{v}_3,$$

e scriviamo la seconda legge della meccanica per ciascun punto materiale

$$\begin{cases} \vec{p}_1 + \vec{F}_{21} = \dfrac{d\vec{q}_1}{dt} \\ \vec{p}_2 + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} = \dfrac{d\vec{q}_2}{dt} \\ \vec{p}_3 + \vec{F}_{23} = \dfrac{d\vec{q}_3}{dt} \end{cases}$$

Ora sommiamo le tre equazioni

$$\{\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3\} + [\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{23}] = \frac{d\vec{q}_1}{dt} + \frac{d\vec{q}_2}{dt} + \frac{d\vec{q}_3}{dt}$$



$$\textcolor{red}{\{}\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3\textcolor{red}{\}} + \textcolor{blue}{[}\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{23}\textcolor{blue}{]} = \frac{d\vec{q}_1}{dt} + \frac{d\vec{q}_2}{dt} + \frac{d\vec{q}_3}{dt}$$

Notiamo che a primo membro il termine tra parentesi graffe e' la somma delle forze esterne, mentre il termine tra parentesi quadre e' la somma delle forze interne

$$\sum_{i=1,3} \vec{F}_i^{ext} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 \qquad \sum_{i=1,3} \vec{F}_i^{int} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{23}$$

$\vec{F}_{21}$ e' la forza che m_2 esercita su m_1, $\vec{F}_{12}$ e' la forza che m_1 esercita su m_2. Per la terza legge della meccanica esse hanno stesso modulo, stessa direzione e verso opposto: **la loro somma e' zero!** Analogo discorso vale per le forze tra le masse 2 e 3, quindi

$$\sum_{i=1,3} \vec{F}_i^{int} = 0.$$

Allora se definiamo la quantita' di moto totale del sistema

$$\vec{Q} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3$$

l'equazione che descrive il moto del sistema diventa

$$\sum_{\mathbf{i}} \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{ext}} = \frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{Q}}}{\mathbf{dt}}$$

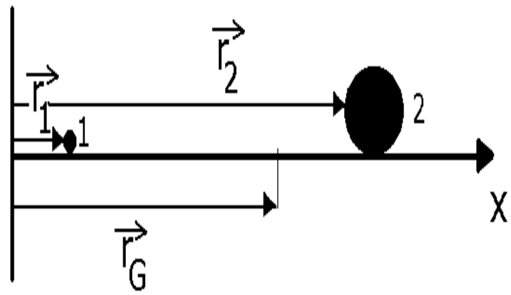
Questa e' la seconda legge della meccanica generalizzata a un sistema di punti materiali.

Un modo alternativo di scrivere la seconda legge della meccanica per un sistema di punti materiali.

Chiamiamo **centro di massa** di un sistema di punti materiali il punto cosi' definito

$$\vec{r}_G = \frac{\Sigma_i \ m_i \ \vec{r}_i}{M_{tot}} = \left(\frac{\Sigma_i \ m_i \ x_i}{M_{tot}}, \frac{\Sigma_i \ m_i \ y_i}{M_{tot}}, \frac{\Sigma_i \ m_i \ z_i}{M_{tot}} \right)$$

dove $\mathbf{M_{tot}} = \Sigma_\mathbf{i} \ \mathbf{m_i}$ e' la massa totale del sistema.



Per esempio,se due masse $m_1 = 1 \ kg$ e $m_2 = 8 \ kg$, sono situate sull'asse x in $x_1 = 1 \ cm$, e $x_2 = 7 \ cm$,

$$x_G = \frac{1 + 56}{9} = 6.3 \ cm.$$

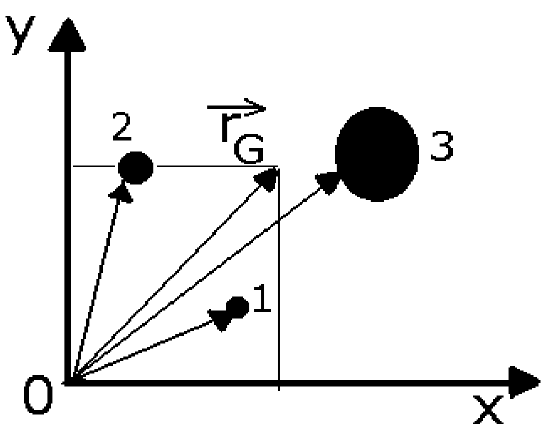
Se tre punti materiali

$$m_1 = 1 \ kg, \quad m_2 = 2 \ kg, \quad m_3 = 6 \ kg,$$

stanno su un piano, e le loro coordinate in cm sono

$$m_1 = (2, 1), \quad m_2 = (1.8, 2.5), \quad m_3 = (3, 3)$$

come in figura, la posizione del centro di massa sara'



$$x_G = \frac{2 + 3.6 + 18}{9} = 2.6 \ cm,$$

$$y_G = \frac{1 + 5 + 18}{9} = 2.7 \ cm$$

Si vede dunque che il centro di massa sta sempre nella zona con maggiore concentrazione di massa.

Centro di massa di un sistema di punti materiali

$$\vec{r}_G = \frac{\Sigma_i \ m_i \ \vec{r}_i}{M_{tot}}$$

Calcoliamo ora la velocita' del centro di massa, facendo la derivata di $\vec{r}_G$ rispetto al tempo e supponendo che la massa non cambi

$$\vec{v}_G = \frac{d\vec{r}_G}{dt} = \frac{1}{M_{tot}} \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M_{tot}} \sum_i m_i \vec{v}_i$$

ma $\sum_i m_i \vec{v}_i$ e' la quantita' di moto totale del sistema, infatti

$$\vec{Q} = \sum_i \vec{q}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

quindi

$$\vec{v}_G = \frac{1}{M_{tot}} \vec{Q} \ \rightarrow \ \vec{Q} = M_{tot} \vec{v}_G.$$

Vediamo dunque che la quantita' di moto totale del sistema e' uguale alla quantita' di moto del centro di massa, immaginato come un **"particellone"** con massa pari a quella del sistema, che si muove con velocita' $\vec{v}_G$.

Torniamo ora alla seconda legge della meccanica scritta per un sistema di punti materiali

$$\sum_i \vec{F}_i^{ext} = \frac{d\vec{Q}}{dt}$$

Da quanto detto si vede subito che, definendo $\vec{F}_{tot}^{ext} = \Sigma_i \vec{F}_i^{ext}$,

$$\vec{F}_{tot}^{ext} = M_{tot} \frac{d\vec{v}_G}{dt} \ \rightarrow \ \vec{F}_{tot}^{ext} = M_{tot} \vec{a}_G$$

il sistema **nel suo insieme** si muove come se fosse un'unico punto materiale di massa $\mathbf{M_{tot}}$ concentrata tutta nel centro di massa, a cui e' applicata la **risultante delle forze esterne**.

Teorema dell'energia cinetica per un sistema di punti

Abbiamo visto che

$$\vec{F}^{ext}_{tot} = M_{tot}\vec{a}_G = M_{tot}\frac{d\vec{v}_G}{dt}$$

Quindi il lavoro fatto dalla risultante delle forze esterne e'

$$L_{tot} = \int_A^B \vec{F}^{ext}_{tot} \cdot \vec{ds} = M_{tot} \int_A^B \frac{d\vec{v}_G}{dt} \cdot \vec{ds}.$$

Assumiamo che il sistema stia traslando rigidamente. La risultante delle forze esterne e' applicata al centro di massa, come se il sistema fosse un'unica particella che si muove con velocita' $\vec{v}_G$, quindi $\vec{ds} = \vec{v}_G\, dt$, e sostituendo nell'integrale scritto prima

$$L_{tot} = M_{tot} \int_A^B \frac{d\vec{v}_G}{dt} \cdot \vec{v}_G\, dt.$$

Ricordando che (si veda la dimostrazione del teorema dell'energia cinetica per un punto materiale)

$$\frac{d\vec{v}_G}{dt} \cdot \vec{v}_G = \frac{1}{2}\frac{dv_G^2}{dt},$$

$$L_{tot} = \frac{1}{2}M_{tot} \int_A^B dv_G^2 = \frac{1}{2}M_{tot}v_{GB}^2 - \frac{1}{2}M_{tot}v_{GA}^2 = \Delta E_c,$$

dove E_c e' l'energia di **traslazione** del centro di massa, pari a

$$E_c = \frac{1}{2}M_{tot}v_G^2$$

Concludiamo che il lavoro totale fatto dalle forze esterne che agiscono su un sistema di punti e' pari alla variazione di energia cinetica di traslazione del centro di massa

CONSERVAZIONE DELLA QUANTITA' DI MOTO per un sistema di punti

$$\sum_i \vec{F}_i^{ext} = \frac{d\vec{Q}}{dt}$$

Se

$$\sum_i \vec{F}_i^{ext} = 0,$$

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = 0, \quad \rightarrow \quad \vec{Q} = costante$$

Se la risultante delle forze esterne agenti su un sistema e' zero, la quantita' di moto totale si conserva.

Attenzione: puo' accadere che solo una delle componenti della risultante delle forze esterne lungo un asse coordinato si annulli e le altre no. In tal caso si conservera' solo la componente corrispondente della quantita' di moto totale.

Inoltre: dato che la quantita' di moto totale e' uguale alla quantita' di moto del centro di massa, se la risultante delle forze esterne e' zero, la quantita' di moto del centro di massa, e quindi la sua velocita', rimane costante:

$$\sum_i \vec{F}_i^{ext} = M_{tot}\frac{d\vec{v}_G}{dt}, \quad \text{se} \quad \sum_i \vec{F}_i^{ext} = 0 \ \rightarrow \ \vec{v}_G = costante$$

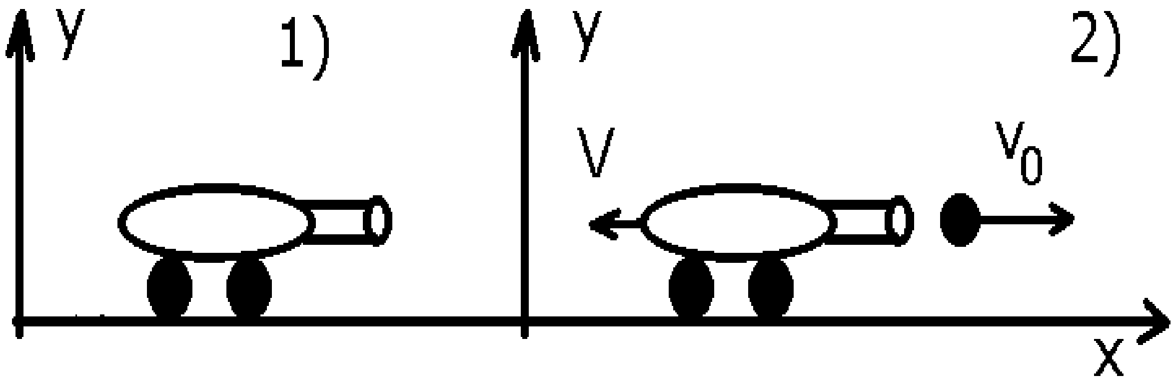
IMPULSO: come abbiamo fatto per il punto materiale, possiamo definire l'impulso che una o piu' forze cedono a un sistema di punti materiali

$$\vec{\mathbf{J}} = \int_0^{\Delta t} \vec{\mathbf{F}}^{ext} \mathbf{dt} = \boldsymbol{\Delta}\vec{\mathbf{Q}}_{tot}$$

L'impulso di una forza esterna che agisce su un sistema di punti materiali e' uguale alla variazione della quantita' di moto totale del sistema

ESEMPIO

Un cannone di massa $M = 100\ kg$ fermo su un piano orizzontale privo di attrito, spara una palla di massa $m = 5\ kg$ con una velocita' iniziale $v_0 = 100\ m/s$ rispetto a terra. Calcolare la velocita' di rinculo del cannone.



La risultante delle forze esterne e' zero, perche' lungo l'asse y ci sono la forza peso e la reazione vincolare che hanno risultante nulla, e lungo l'asse x non c'e' nessuna forza; di conseguenza, la quantita' di moto totale del sistema (cannone + palla) si conserva. Limitiamoci all'analisi del moto lungo x, dato che non c'e' moto lungo y:

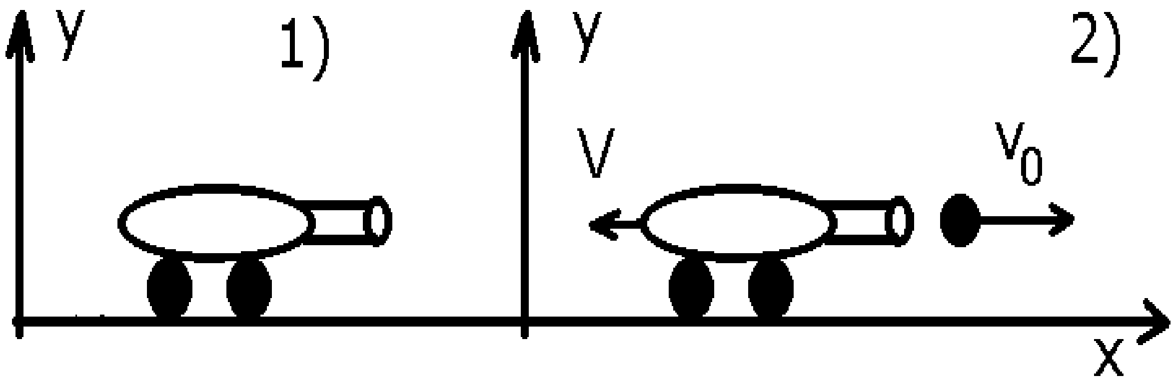
- **1)** Prima dello sparo il sistema e' fermo: $\quad Q_x = q_x^c + q_x^p = 0$
- **2)** Al momento dello sparo cannone e palla acquistano rispettivamente velocita' V e v_0, quindi $\ Q'_x = q_x'^c + q_x'^p = M\ V + mv_0$;

per la conservazione della quantita' di moto, Q'_x deve essere zero

$$M\ V + mv_0 = 0\ \rightarrow\ V = -\frac{m}{M}\, v_0, \qquad V = -\frac{5}{100}\, 100 = -5\, m/s$$

il segno meno sta ad indicare che il cannone si muove nel verso negativo dell'asse x.

COSA CAMBIA SE C'E ATTRITO?



In questo caso lungo l'asse x agira' la forza F_d, e la risultante delle forze esterne non sara' nulla.

Tuttavia se consideriamo due istanti di tempo vicinissimi: uno prima dello sparo, l'altro dopo lo sparo, l'intervallo **dt** tra i due puo' essere considerato piccolissimo, e l'impulso ceduto al sistema dalla forza di attrito sara' in modulo

$$dJ = F_d\ dt.$$

In conseguenza di questo impulso, il sistema subira' una variazione di quantita' di moto pari a

$$dQ = F_d\ dt.$$

Possiamo assumere che F_d sia costante nell'intervallo dt, quindi se dt e' infinitesimo, l'impulso ceduto e' trascurabile e di conseguenza

$$dQ \simeq 0 \ \rightarrow \ Q = costante.$$

Quindi possiamo continuare ad applicare la legge di conservazione della quantita' di moto come fatto prima.

URTI

Definiamo **urto** l'interazione tra due (o piu') corpi che avviene in un intervallo di tempo τ cosi' piccolo che

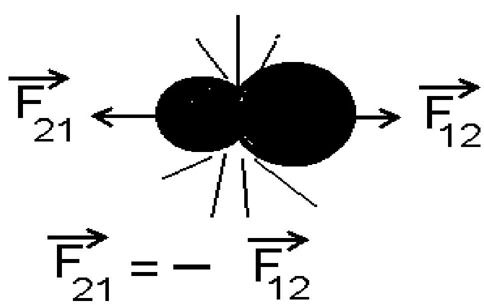
- Si puo' trascurare l'impulso delle forze esterne

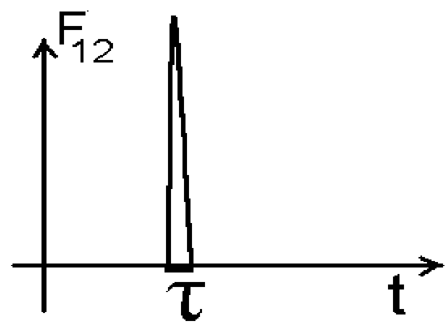
$$\vec{J}^{ext} = \int_t^{t+\tau} \vec{F}^{ext}\, dt \simeq 0$$

  quindi **la quantita' di moto del sistema si conserva**

- tra i corpi che urtano si generano coppie di forze azione-reazione molto intense tali che

$$\vec{J}_{21} = \int_t^{t+\tau} \vec{F}_{21}^{int}\, dt, \quad \vec{J}_{12} = \int_t^{t+\tau} \vec{F}_{12}^{int}\, dt \quad \text{e} \quad \vec{J}_{21} + \vec{J}_{12} = 0$$



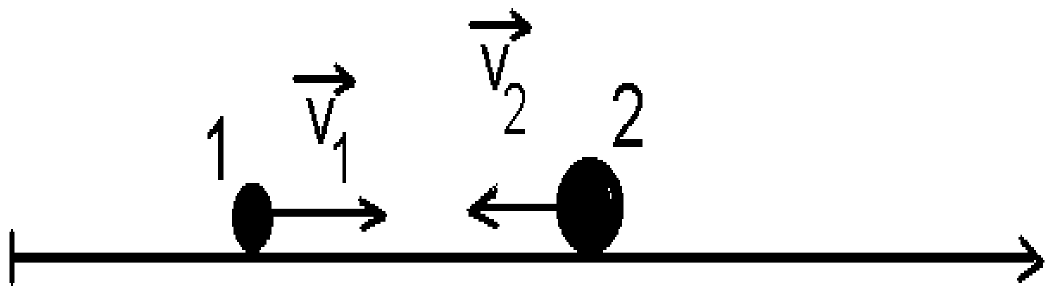


- Un urto e' **elastico** se le forze impulsive che si generano nell'urto sono conservative; la variazione di energia potenziale elastica durante la fase di compressione si trasforma in energia cinetica nella fase di rilascio, dunque non si ha dissipazione di energia. In questo caso,**l'energia meccanica prima e dopo l'urto e' la stessa**.

- Un urto e' **parzialmente o totalmente anelastico** quando una parte dell'energia cinetica iniziale del sistema (o tutta) viene dissipata nell'urto: **l'energia meccanica non si conserva**.

Lo studio degli urti e' di fondamentale importanza: molto di cio' che sappiamo sui costituenti elementari della materia e' stato ottenuto studiando fenomeni di urto tra particelle.

URTO CENTRALE ELASTICO



Nell'urto si conservano **la quantita' di moto e l'energia meccanica del sistema formato dalle due masse**

$$\begin{cases} m_1\,\vec{v}_1 + m_2\,\vec{v}_2 = m_1\,\vec{v'}_1 + m_2\,\vec{v'}_2 \\ \\ \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 \end{cases}$$

NOTARE CHE nell'eq. dell'energia meccanica, l'energia potenziale non compare perche' e' la stessa immediatamente prima e immediatamente dopo l'urto. Siccome il moto e' unidimensionale, proiettando l'equazione vettoriale nella direzione del moto possiamo scrivere semplicemente

$$\begin{cases} m_1\,v_1 + m_2\,v_2 = m_1\,v'_1 + m_2\,v'_2 \\ \\ \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 \end{cases}$$

Per risolvere il sistema conviene procedere in questo modo: portiamo a primo membro le grandezze con l'indice 1 e a secondo membro quelle con l'indice 2

$$\begin{array}{ll} \mathbf{1}) & m_1\,(v_1 - v'_1) = m_2\,(v'_2 - v_2) \\ \mathbf{2}) & m_1\left(v_1^2 - v_1'^2\right) = m_2\left(v_2'^2 - v_2^2\right) \end{array}$$

$$\begin{aligned} &\textbf{1)} \quad m_1 \left(v_1 - v'_1\right) = m_2 \left(v'_2 - v_2\right) \\ &\textbf{2)} \quad m_1 \left(v_1^2 - v_1'^2\right) = m_2 \left(v_2'^2 - v_2^2\right) \end{aligned}$$

sviluppiamo i prodotti notevoli nella **2)**

$$\begin{aligned} &\textbf{1)} \quad m_1 \left(v_1 - v'_1\right) = m_2 \left(v'_2 - v_2\right) \\ &\textbf{2)} \quad m_1 \left(v_1 - v_1^{'}\right) \left(v_1 + v_1^{'}\right) = m_2 \left(v'_2 - v_2\right) \left(v'_2 + v_2\right) \end{aligned}$$

dividiamo l'eq. **2)** per l'eq. **1)**; otteniamo la seguente equazione

$$\textbf{3)} \qquad \left(v_1 + v'_1\right) = \left(v'_2 + v_2\right).$$

Ora mettiamo a sistema la **3)** e la **1)**

$$\begin{aligned} &\textbf{3)} \quad \left(v_1 + v'_1\right) = \left(v'_2 + v_2\right) \\ &\textbf{1)} \quad m_1 \left(v_1 - v'_1\right) = m_2 \left(v'_2 - v_2\right) \end{aligned}$$

risolvendo la **3)** rispetto a v'_1 e sostituendo nella **1)** si trova

$$\begin{aligned} &\textbf{3)} \quad v'_1 = v'_2 + v_2 - v_1 \\ &\textbf{1)} \quad m_1 v_1 - m_1 \left(v'_2 + v_2 - v_1\right) = m_2 \left(v'_2 - v_2\right) \end{aligned}$$

Risolviamo la **1)** rispetto a v'_2.

$$m_1 v_1 - m_1 v'_2 - m_1 v_2 + m_1 v_1 = m_2 v'_2 - m_2 v_2$$

$$\Downarrow$$

$$2 m_1 v_1 + v_2 \left(m_2 - m_1\right) = \left(m_2 + m_1\right) v'_2$$

$$\Downarrow$$

$$v'_2 = \frac{2 m_1 v_1 + v_2 \left(m_2 - m_1\right)}{m_1 + m_2}$$

Sostituendo nella **3)** troviamo v'_1

$$v'_1 = \frac{2 m_1 v_1 + v_2 \left(m_2 - m_1\right)}{m_1 + m_2} + v_2 - v_1 =$$

$$= \frac{2 m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_1 v_2 + m_1 v_2 + m_2 v_2 - m_1 v_1 - m_2 v_1}{m_1 + m_2} =$$

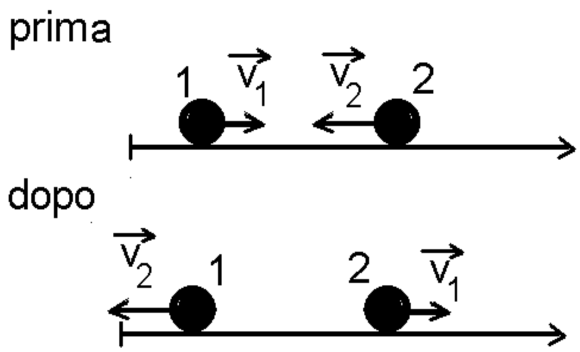
$$= \frac{2 m_2 v_2 + v_1 \left(m_1 - m_2\right)}{m_1 + m_2}$$

quindi infine

$$v'_1 = \frac{2m_2v_2 + v_1\,(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$$
$$v'_2 = \frac{2m_1v_1 + v_2\,(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}$$

CASI PARTICOLARI

1) Se $m_1 = m_2$



$$v'_1 = v_2$$
$$v'_2 = v_1$$

Inoltre se $v_1 = 0$, cioe' la palla 1 e' ferma prima dell'urto, dopo l'urto

$$v'_1 = v_2$$
$$v'_2 = 0,$$

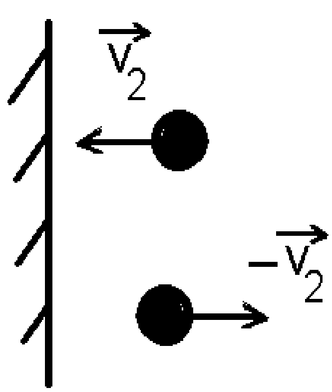
cioe' la palla urtante si ferma, e l'altra parte con la velocita' della palla urtante.

2) Urto contro una parete. Assumiamo $v_1 = 0$ (parete ferma), quindi

$$v'_1 = \frac{2m_2v_2}{m_1 + m_2} \qquad v'_2 = \frac{v_2\,(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}$$

Se $m_1 >> m_2$, possiamo considerare il seguente limite

$$m_1 \rightarrow \infty,$$



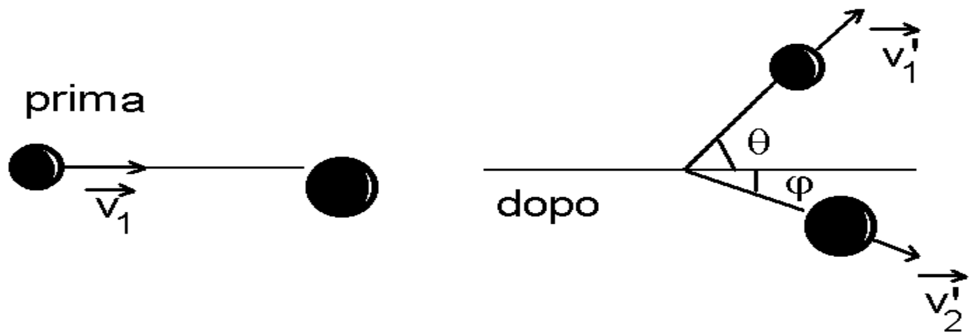
per cui si trova

$$v'_1 = \frac{2m_2v_2}{m_1(1 + \frac{m_2}{m_1})} \rightarrow 0$$
$$v'_2 = \frac{v_2m_1(\frac{m_2}{m_1} - 1)}{m_1(1 + \frac{m_2}{m_1})} \rightarrow -v_2$$

cioe' la palla inverte la sua velocita'.

URTI IN DUE DIMENSIONI

Se l'urto non e' centrale, si procede nel modo seguente. Supponiamo che m_2 sia fermo (possiamo sempre scegliere un riferimento in cui questa condizione e' soddisfatta). Dopo l'urto le due masse partiranno in due direzioni diverse formanti angoli θ e ϕ con la direzione iniziale della velocita' $\vec{v}_1$ come in figura



Proiettando sugli assi l'equazione della conservazione della quantita' di moto

$m_1\ \vec{v}_1 + m_2\ \vec{v}_2 = m_1\ \vec{v'}_1 + m_2\ \vec{v'}_2$

e tenendo conto che $\vec{v}_2 = 0$, si trova

$$\begin{cases} m_1\ v_{1x} = m_1\ v'_{1x} + m_2\ v'_{2x} \\ m_1\ v_{1y} = m_1\ v'_{1y} + m_2\ v'_{2y} \end{cases}$$

Se l'urto e' elastico, l'energia meccanica si conserva, per cui le equazioni che descrivono l'urto sono

$$\begin{cases} m_1\ v_{1x} = m_1\ v'_{1x} + m_2\ v'_{2x} \\ m_1\ v_{1y} = m_1\ v'_{1y} + m_2\ v'_{2y} \\ \dfrac{1}{2}m_1 v_1^2 + \dfrac{1}{2}m_2 v_2^2 = \dfrac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \dfrac{1}{2}m_2 v_2'^2 \end{cases}$$

dove

$v'_{1x} = v'_1\ cos\ \theta, \quad v'_{1y} = v'_1\ sen\ \theta,$

$v'_{2x} = v'_2\ cos\ \phi, \quad v'_{2y} = v'_2\ sen\ \phi,$

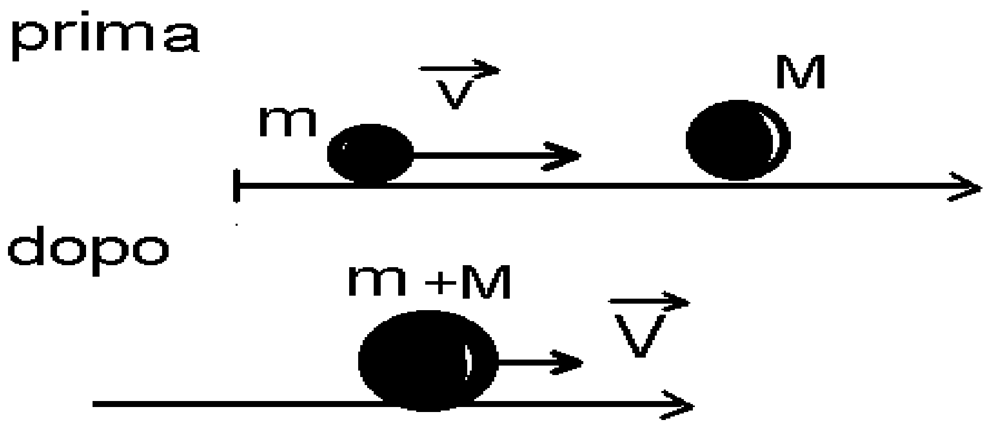
e

$v'^2_1 = v'^2_{1x} + v'^2_{1y}, \qquad v'^2_2 = v'^2_{2x} + v'^2_{2y}.$

Abbiamo dunque tre equazioni e quattro incognite, cioe' $(v'_{1x}, v'_{1y}, v'_{2x}, v'_{2y})$, o, alternativamente $(v'_1, v'_2, \theta, \phi)$. Per risolvere il problema dobbiamo dunque aver misurato una delle quattro grandezze.

URTO ANELASTICO

Se l'urto e' anelastico, si conserva la quantita' di moto totale del sistema ma non l'energia meccanica. Se l'urto e' totalmente anelastico, dopo l'urto i due corpi procedono insieme. Per esempio:
un proiettile di massa m viaggia in direzione orizzontale con velocita' $\vec{v}$, e urta un corpo di massa M poggiato sul piano e vi rimane conficcato. Calcolare la velocita' del sistema dopo l'urto.



Prima dell'urto

$$\vec{Q} = m\vec{v}$$

Dopo l'urto

$$\vec{Q}' = (m + M)\vec{V}$$

Dato che la quantita' di moto totale si conserva nell'urto

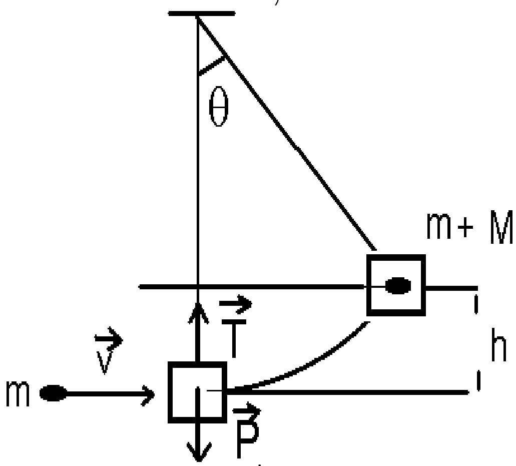
$$m\vec{v} = (m + M)\vec{V} \;\rightarrow\; mv = (m + M)V$$

e quindi

$$V = \frac{mv}{m + M}$$

Altro esempio di urto anelastico: il pendolo balistico

Un proiettile di massa m viaggia in direzione orizzontale con velocita' $\vec{v}$, e urta un blocco di massa M, sospeso tramite una fune inestensibile e di massa trascurabile e vi rimane conficcato. Sapendo che dopo l'urto il blocco si alza di un tratto h sopra il livello iniziale, calcolare la velocita' iniziale del proiettile.



Le forze che agiscono sul sistema sono la forza peso e la tensione della fune. L'urto avviene in un tempo cosi' breve che l'impulso delle forze esterne si puo' considerare trascurabile; pertanto si conserva la quantita' di moto totale.

Prima: $\vec{Q} = m\vec{v}$ **Dopo:** $\vec{Q}' = (m+M)\vec{V}$,

quindi

$$mv = (m+M)V \;\rightarrow\; V = \frac{mv}{m+M}$$

Dopo l'urto il proiettile rimane nel blocco, ed entrambi si sollevano di un tratto h. In questa fase possiamo applicare la conservazione dell'energia meccanica, tra lo stato A, subito dopo l'urto quando il blocco+proiettile partono con velocita' V, e lo stato B quando essi arrivano nella posizione di massima quota e si fermano, per poi riscendere. **Notare che** sul sistema agisce la tensione della fune che non e' conservativa; tuttavia essa e' perpendicolare allo spostamento, quindi non compie lavoro e non contribuisce all'energia meccanica. Prendendo come livello zero dell'energia potenziale gravitazionale quella dello stato A, cioe' ponendo $U(A) = 0$, scriveremo

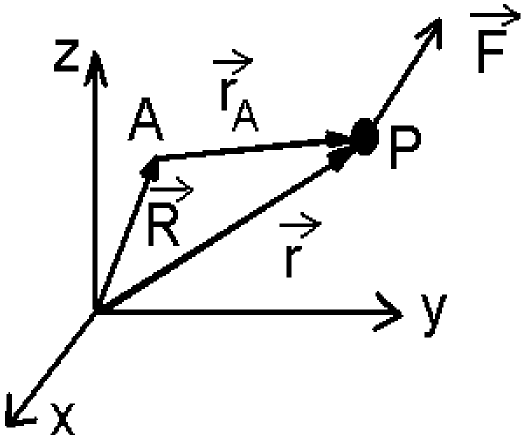
$$\tfrac{1}{2}(m+M)V^2 = (m+M)gh \;\rightarrow\; V^2 = 2gh$$

e sostituendo il valore di V trovato prima

$$\left(\frac{mv}{m+M}\right)^2 = 2gh \;\rightarrow\; v = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gh}$$

MOMENTO DI UNA FORZA

Supponiamo che una forza sia applicata a un punto materiale **P**.

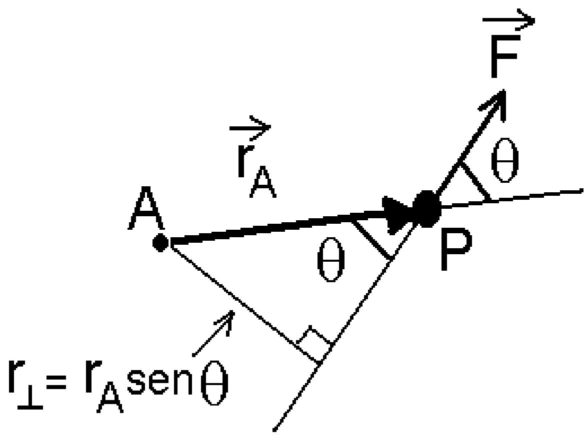


Definiamo **momento della forza rispetto a un polo A** il seguente **vettore**

$$\vec{\tau} = \vec{r}_A \times \vec{F}$$

dove $\vec{r}_A$ e' il vettore che congiunge il polo A con il punto di applicazione della forza, P.

Il **modulo** di τ e'



$$\tau = r_A\ F\ \ sen\ \theta = F r_\perp,$$

dove $r_\perp = r_A\ \ sen\ \theta$ e' detto **braccio della forza** ed e' pari alla distanza tra il polo A e la retta che individua la direzione di $\vec{F}$.

La **direzione** del vettore $\vec{\tau}$ e' perpendicolare al piano individuato da $\vec{r}_A$ e $\vec{F}$, e il **verso** e' quello che vede ruotare $\vec{r}_A$ su $\vec{F}$ in senso antiorario.

In maniera analoga al momento della forza, possiamo definire il **momento della quantita' di moto**:

$$\vec{\ell} = \vec{r}_A \times \vec{q}$$

dove ricordiamo che $\vec{q} = m\vec{v}$. La **direzione** di $\vec{\ell}$ e' perpendicolare al piano individuato da $\vec{r}_A$ e $\vec{v}$.

DIMENSIONI

Momento della forza

$$\vec{\tau} = \vec{r}_A \times \vec{F}$$

dimensioni:

$$[\boldsymbol{\tau}] = [\mathbf{l} \cdot \mathbf{mlt^{-2}}] = [\mathbf{ml^2t^{-2}}]$$

momento della quantita' di moto:

$$\vec{\ell} = \vec{r}_A \times \vec{q}$$

dimensioni:

$$[\boldsymbol{\ell}] = [\mathbf{l} \cdot \mathbf{mlt^{-1}}] = [\mathbf{ml^2t^{-1}}]$$

Che relazione c'e' tra i due?

momento della forza **momento della q.d.m.**

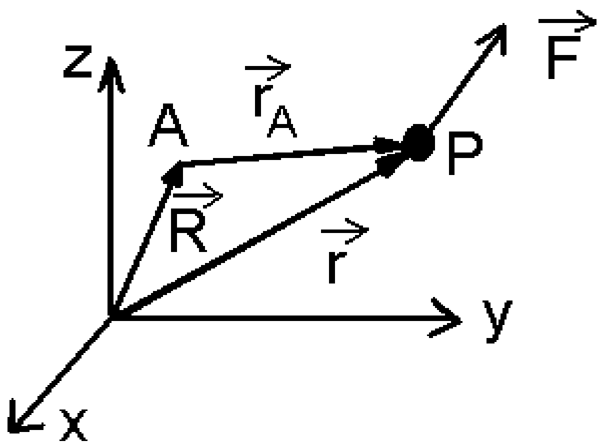
$$\vec{\tau} = \vec{r}_A \times \vec{F}, \qquad \vec{\ell} = \vec{r}_A \times \vec{q}$$

Sappiamo che $\vec{F} = \dfrac{d\vec{q}}{dt}$, quindi

$$\vec{r}_A \times \vec{F} = \vec{r}_A \times \frac{d\vec{q}}{dt} \quad \rightarrow \quad \vec{\tau} = \vec{r}_A \times \frac{d\vec{q}}{dt}.$$

Calcoliamo ora $\dfrac{d\vec{\ell}}{dt}$

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \times \vec{q} + \vec{r}_A \times \frac{d\vec{q}}{dt}$$



Dalla figura si vede che

$$\vec{R} + \vec{r}_A = \vec{r} \ \rightarrow \ \vec{r}_A = \vec{r} - \vec{R}$$

quindi

$$\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{v} - \vec{v}_A,$$

dove $\vec{v}$ e' la velocita' del punto materiale P, mentre $\vec{v}_A$ e' la velocita' del polo A. Allora

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{v} \times \vec{q} - \vec{v}_A \times \vec{q} + \vec{r}_A \times \frac{d\vec{q}}{dt}$$

Il primo termine e' zero perche' $\vec{v}$ e' parallelo a $\vec{q}$, quindi

$$\vec{\tau} = \vec{r}_A \times \frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{d\vec{\ell}}{dt} + \vec{v}_A \times \vec{q} \quad \rightarrow \quad \vec{\tau} = \mathbf{\frac{d\vec{\ell}}{dt}} + \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{q}}$$

Se il polo A e' fisso $\vec{v}_A = 0$, e quindi

$$\vec{\tau} = \mathbf{\frac{d\vec{\ell}}{dt}}$$

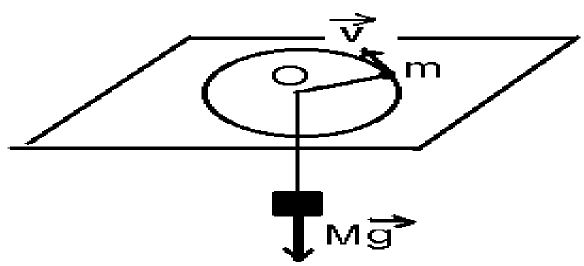
CONSERVAZIONE DEL MOMENTO DELLA QUANTITA' DI MOTO

Se il momento delle forze che agiscono su un punto materiale e' zero, il momento della quantita' di moto si conserva:

$$\vec{\tau} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \frac{\mathbf{d}\vec{\ell}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \vec{\ell} = \mathbf{cost.}$$

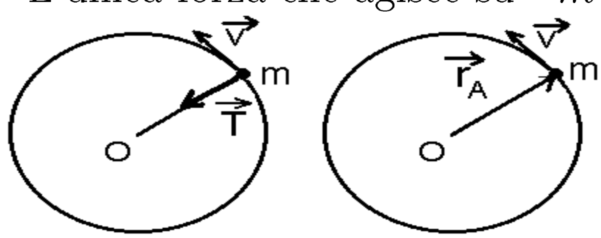
Applicazioni:

Una pallina di massa m e' attaccata a un filo inestensibile e di massa trascurabile, e ruota su un piano intorno a un punto O con velocita' angolare costante $\omega_0 = 2\ rad/s$. Se si accorcia il filo a meta',



per esempio applicando un peso come in figura e facendolo scendere finche' $r = \frac{r_0}{2}$, quanto varra' la nuova velocita' angolare?

L'unica forza che agisce su m e' la tensione del filo $\vec{T}$.



Il momento della forza rispetto al polo fisso **O** e'

$$\vec{\tau} = \vec{r}_A \times \vec{T}.$$

Essendo $\vec{r}_A$ parallelo a $\vec{T}$, $\vec{\tau}$ e' nullo, quindi il momento della quantita' di moto della pallina si conserva: $\vec{\ell} = \vec{r}_A \times m\vec{v} = cost.$
Ricordando che in questo caso $\vec{v} \perp \vec{r}_A$, e che $v = \omega r$, si trova

$$\vec{\ell} = \vec{r}_A \times m\vec{v} \ \rightarrow \ \ell = mvr_A = m\omega r_A^2.$$

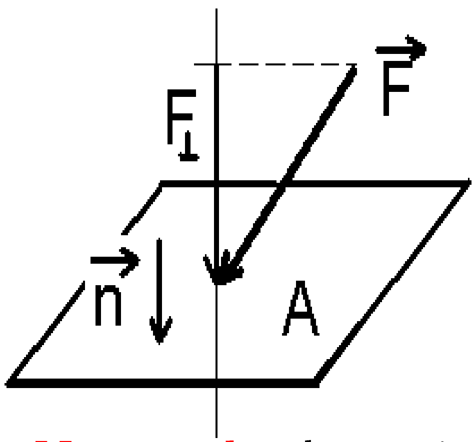
Applichiamo la conservazione del momento angolare tra l'istante iniziale, quando $r_A = r_0$, e l'istante finale, quando $r_A = \dfrac{r_0}{2}$

$$m\omega_0 r_0^2 = m\omega_1 \frac{r_0^2}{4} \ \rightarrow \ \omega_1 = 4\omega_0 = 8\ rad/s.$$

FLUIDI

La caratteristica fondamentale di un fluido e' quella di non avere forma propria, ma di assumere quella del recipiente in cui si trova. In questo senso, sia i gas che i liquidi sono fluidi. A livello microscopico, in un fluido gli atomi **non** sono disposti in una struttura ordinata. Per descrivere il comportamento dei solidi usiamo le grandezze **massa e forza**; nel caso dei fluidi queste verranno sostituite da **densita' e pressione**. Se la densita' e' costante il fluido si dice **incomprimibile**

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{dm}}{\mathbf{dV}} \quad \rightarrow \quad [\boldsymbol{\rho}] = [\mathbf{ml^{-3}}]$$



$$\mathbf{P} = \frac{\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}}{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{F}_\perp}{\mathbf{A}}$$

dove $\vec{n}$ e' il versore normale alla superficie, $F_\perp$ e' la componente normale della forza, e A e' l'area della superficie.

Notare che: la pressione e' una variabile interna, legata allo stato microscopico del fluido, ma la definiamo "dall'esterno" tramite misure di forze e superfici.

$$\textbf{Dimensioni} \quad [\mathbf{P}] = \frac{[\mathbf{mlt^{-2}}]}{\mathbf{l^2}} = [\mathbf{ml^{-1}t^{-2}}]$$

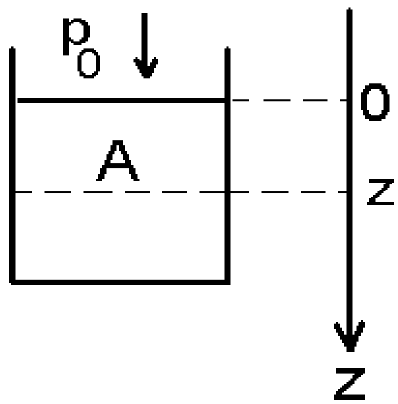
L'unita' di misura della pressione e' il **Pascal**:

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ Newton}/m^2$$

Studieremo nel seguito il comportamento di un fluido incomprimibile (liquido) in condizioni di equilibrio, cioe' tali che velocita', temperatura e densita' siano costanti.

LEGGE DI STEVINO

Un liquido incomprimibile e' racchiuso in un recipiente come in figura.



Vogliamo calcolare la pressione alla profondita' z rispetto alla superficie del liquido. Sia A la sezione del recipiente. La pressione sara' data da quella esterna, p_o, piu' quella esercitata dalla massa di liquido che grava su A, cioe'

$$p(z) = p_0 + \frac{mg}{A}$$

Poiche' $m = \rho V = \rho A z$

$$p(z) = p_0 + \frac{(\rho A z)g}{A} = p_0 + \rho z g$$

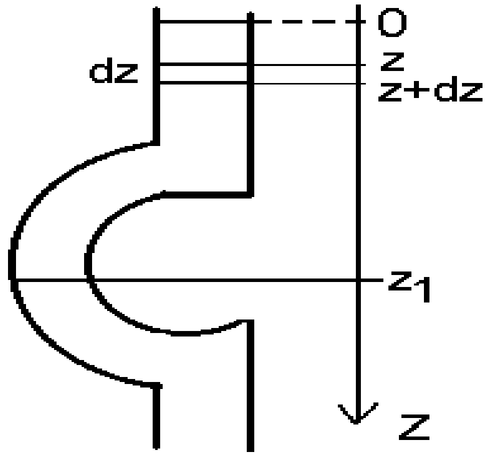
La legge di Stevino stabilisce quindi che la pressione a una profondita' z e'

$$\mathbf{p(z) = p_0 + \boldsymbol{\rho} gz}$$

Questo e' vero **qualsiasi sia la forma del recipiente**

Dato che la pressione in un fluido in equilibrio dipende solo dalla profondita', una variazione della pressione si trasmette inalterata a tutto il fluido. Questa affermazione e' nota come **LEGGE DI PASCAL**.

Perche' la legge di Stevino e' indipendente dalla forma del recipiente?



Supponiamo di voler calcolare la pressione alla profondita' $\mathbf{z_q}$. A tale scopo dividiamo la parte del fluido tra 0 e $z1$ in striscioline di spessore dz come in figura. Detta $A(z)$ la sezione del recipiente alla profondita' z, ogni striscia dara' un contributo alla pressione pari a

$$dP = \frac{dmg}{A(z)} = \frac{\rho dVg}{A(z)} = \frac{\rho A(z)dzg}{A(z)} = \rho g dz$$

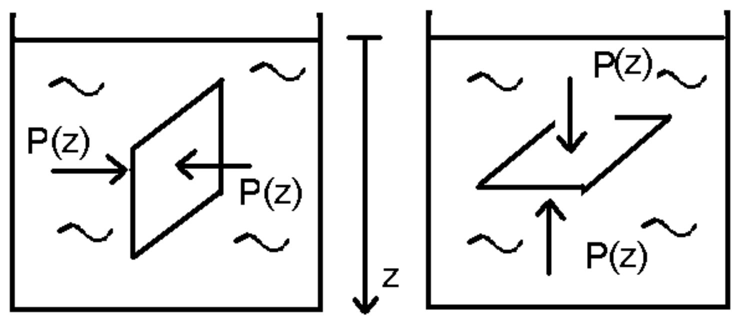
Alla profondita' $z1$ la pressione sara' la somma di tutte queste pressioni elementari, cioe'

$$P(z_1) = \int_0^{z_1} dP = \int_0^{z_1} \rho g dz = \rho g \int_0^{z_1} dz = \rho g z_1,$$

come stabilito dalla legge di Stevino.

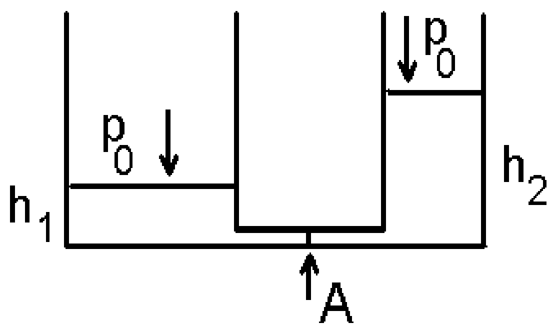
Applicazioni della legge di Stevino

Innanzi tutto ricordiamo che, dato un fluido in equilibrio, presa una qualsiasi sezione, la pressione esercitata dal fluido su questa sezione deve essere uguale da entrambi i lati



VASI COMUNICANTI

Un fluido e' contenuto in due recipienti comunicanti, di sezione diversa, come in figura. Come si dispone il fluido all'equilibrio?



Applicando la legge di Stevino alla sezione A imponiamo che, essendo il fluido in equilibrio, la pressione da destra e da sinistra sia uguale

$$P_0 + \rho g h_1 = P_0 + \rho g h_2$$

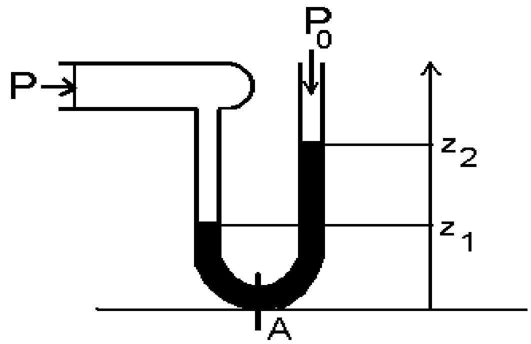
dove P_0 e' la pressione atmosferica, ρ e' la densita' del fluido e h_1 e h_2 sono le altezze delle colonne di fluido nei due recipienti. Si vede subito che questa equazione e' soddisfatta solo se

$$\mathbf{h_1 = h_2}$$

cioe': **il fluido si dispone nei due recipienti alla stessa quota**.

MANOMETRO

Il manometro e' uno strumento che serve per misurare la pressione



La pressione $\mathbf{P}$ e' l'incognita che vogliamo misurare (per es. la pressione delle ruote di un'automobile). Sotto l'azione di $\mathbf{P}$ la colonnina di mercurio si sposta fino a raggiungere, a sinistra del tubo, l'altezza z_1, e a destra l'altezza z_2. Applichiamo la legge di Stevino alla sezione A alla base del tubo, imponendo che, essendo il mercurio in equilibrio, la pressione da destra e da sinistra sia uguale:

$$\mathbf{P} + \rho g z_1 = P_0 + \rho g z_2$$

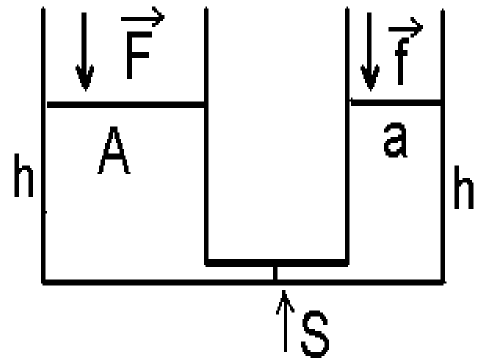
dove P_0 e' la pressione atmosferica e ρ e' la densita' del mercurio. Si trova dunque che

$$\mathbf{P} = (z_2 - z_1)\,\rho g + P_0$$

quindi misurando $(z_2 - z_1)$ ricaviamo la pressione incognita.

MARTINETTO IDRAULICO

Supponiamo di voler sollevare una massa M applicando una forza $f < Mg$. E' possibile? Si, se usiamo un martinetto idraulico. Vediamo come funziona.



Siano **A** e **a**, le sezioni dei due recipienti, in cui e' contenuto un fluido incomprimibile. Le due sezioni superficiali sono chiuse da due pistoni su cui agiscono le forze esterne **F** e **f**, rispettivamente. All'equilibrio il sistema si dispone come in figura. Applicando la legge di Stevino alla sezione S, si avra'

$$\frac{F}{A} + \rho g h = \frac{f}{a} + \rho g h,$$

cioe'

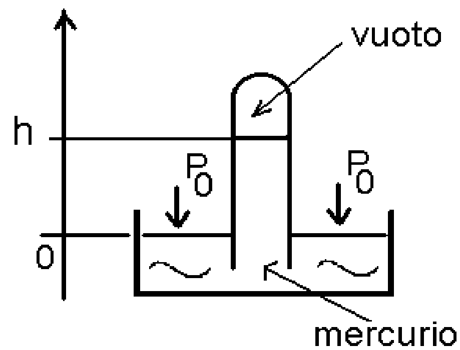
$$\frac{F}{A} = \frac{f}{a} \;\rightarrow\; f = \frac{a}{A} F$$

Dato che $a < A$, la forza da applicare per bilanciare F e' minore di F! In pratica il martinetto idraulico e' un moltiplicatore di forza. Quindi per sollevare la massa M, bastera' applicare una forza leggermente superiore a

$$f = \frac{a}{A} Mg.$$

BAROMETRO DI TORRICELLI

Il barometro di Torricelli e' uno strumento per misurare la pressione atmosferica. E' composto da una vaschetta contenente mercurio, in cui e' immerso un tubo di vetro in cui e' stato fatto il vuoto. All'equilibrio la colonnina di mercurio nel tubo avra' altezza h



Se applichiamo la legge di Stevino a una sezione posta a quota zero, vediamo che la pressione atmosferica deve uguagliare quella della colonnina di mercurio

$$p_0 = \rho g h$$

quindi misurando h troviamo p_0. Notare che l'altezza della colonnina non dipende dalla dimensione del tubo. Notare anche che nella realta' sopra il mercurio nella colonnina la pressione non e' proprio zero, perche' ci sono comunque vapori residui di mercurio, quindi a destra dell'equazione dovremmo aggiungere la pressione esercitata dal vapore.

Altre unita' di misura della pressione:

Atmosfera: 1 atm e' la pressione media misurata al livello del mare a $0\ ^oC$, ed e' pari a

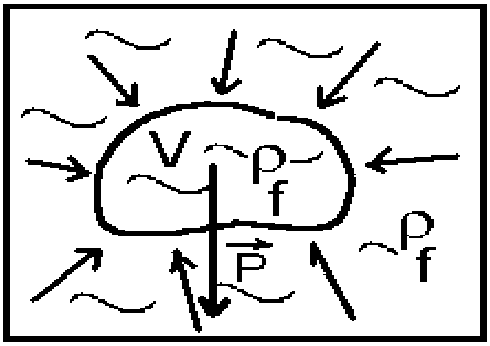
$$1 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5 \ Pa$$

mm di mercurio

$$1 \ mm \ di \ mercurio = 133 Pa$$

PRINCIPIO DI ARCHIMEDE

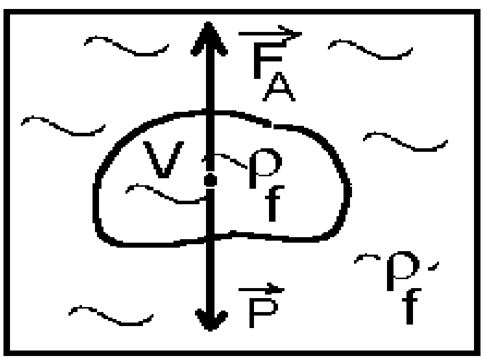
Un fluido di densita' $\boldsymbol{\rho_f}$ in equilibrio e' contenuto in un recipiente.



Consideriamo una porzione di fluido di volume **V**. Su di esso agiscono la forza peso e le forze esercitate dal fluido circostante. Indichiamo con $\vec{F}_A$ la risultante di tali forze. Essendo il fluido in equilibrio, la somma delle forze agenti sulla porzione considerata deve essere zero:

$$\vec{F}_A + \vec{P} = 0;$$

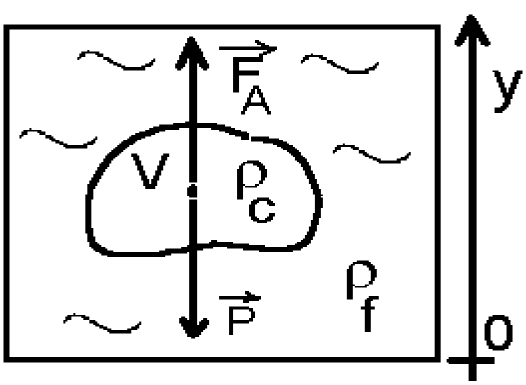
ne deduciamo che la risultante delle forze esercitate dal fluido, che chiamiamo **Spinta di Archimede**, e' pari a



$$\vec{F}_A = -\vec{P} = -\boldsymbol{\rho_f} \mathbf{V} \vec{\mathbf{g}},$$

dunque e' diretta come la forza peso ma in verso opposto, ed e' applicata al **centro di massa della porzione di fluido**.

Supponiamo ora di rimuovere la porzione di fluido, e di sostituirla con un corpo che abbia la stessa forma ma diversa densita', $\boldsymbol{\rho_c}$.



Il corpo non e' piu' in equilibrio, e, per la seconda legge della dinamica,

$$m\vec{a} = \vec{F}_A + \vec{P}_c$$

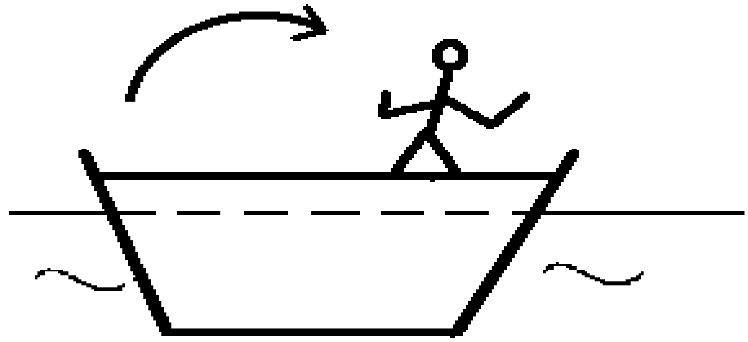
dove

$$\Downarrow$$

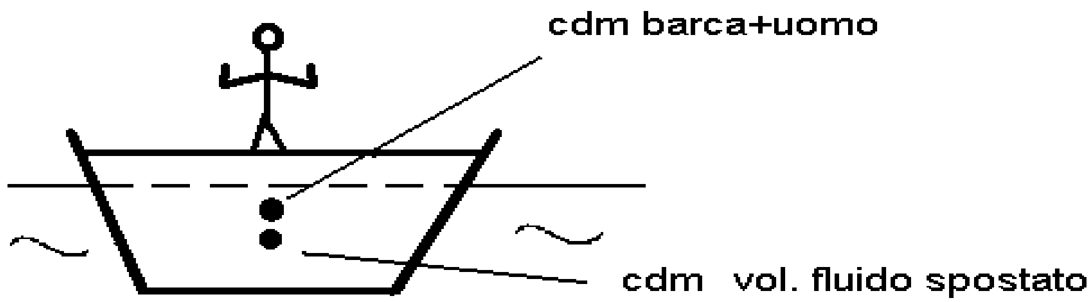
$$ma = \boldsymbol{\rho_f} V g - \boldsymbol{\rho_c} V g = (\boldsymbol{\rho_f} - \boldsymbol{\rho_c})\, V g$$

per cui se la densita' del corpo immerso e' minore di quella del fluido, l'accelerazione e' diretta verso l'alto e il corpo sale, se viceversa $\rho_c > \rho_f$ il corpo scende.

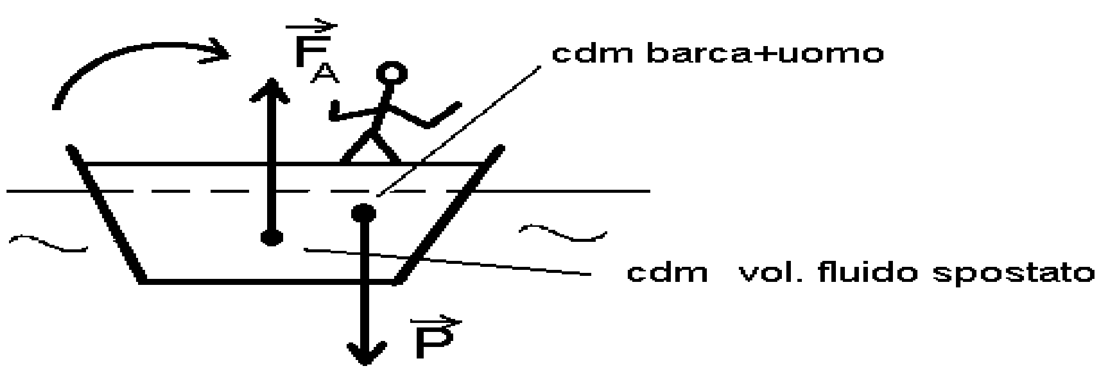
perche' se l'uomo si sposta verso l'estremita' della barca questa si capovolge?



Ricordiamo che la forza peso e' applicata al centro di massa del sistema barca + uomo, mentre la spinta di Archimede e' applicata al centro di massa del volume di fluido spostato. Supponiamo che l'uomo stia fermo al centro della barca. In questo caso i punti di applicazione delle due forze stanno sulla stessa retta verticale, quindi le due forze si equilibrano



Se l'uomo si sposta, si sposta anche il centro di massa del sistema barca+uomo, quindi la forza peso e la spinta di Archimede formano una coppia di forze che fa ruotare la barca



FLUDI IN MOTO

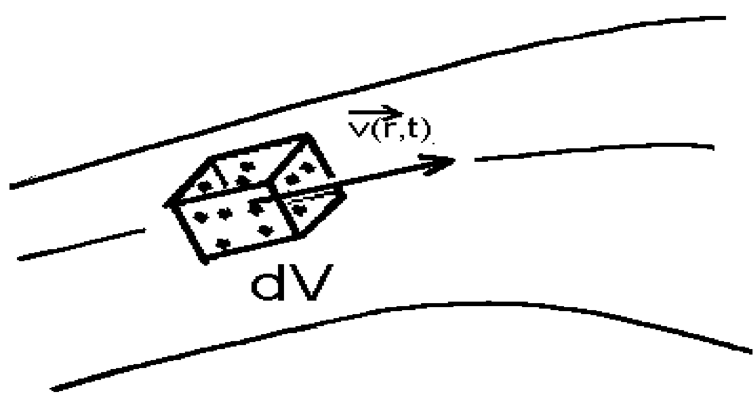
In generale, lo studio del moto dei fluidi e' un problema complesso, perche' si deve tener conto di fenomeni quali per esempio la conduzione, la convezione, la viscosita'; bisogna cioe' descrivere flussi di energia e di materia. Mentre per descrivere il moto di un punto materiale e' sufficiente conoscerne la massa e la velocita', nel caso di un fluido occorre sapere come variano punto per punto velocita', densita', pressione e temperatura. Dobbiamo trovare un modo per semplificare il problema.

- Siccome non possiamo studiare il comportamento microscopico del fluido, molecola per molecola, definiamo un **elemento di volume** dV, tale che

$$dV << V_{sistema},$$

ma che al tempo stesso sia sufficientemente grande da contenere molte molecole, cioe'

$$dV >> V_{molecola}$$

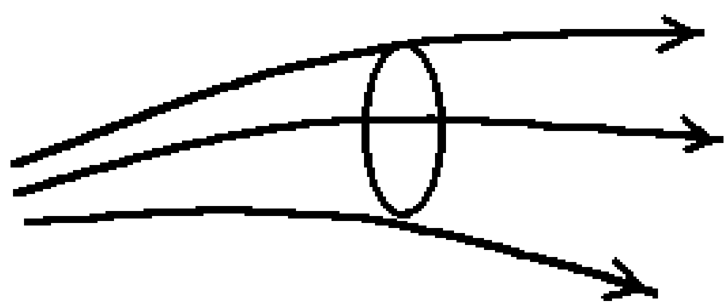


- Chiamiamo $\vec{\mathbf{v}}(\mathbf{r},\mathbf{t})$ la velocita' del centro di massa dell'elemento di fluido. In pratica l'elemento di fluido sostituisce, nella descrizione del fluido, il punto materiale della meccanica del punto. D'ora in avanti chiameremo **particella di fluido** l'elemento di fluido contenuto nel volume dV.

- Definiamo **linee di flusso** le traiettorie descritte dalle particelle di fluido nel loro moto, cioe' le curve a cui, punto per punto, le loro velocita' $\vec{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, \mathbf{t})$ sono tangenti. **Le linee di flusso non si intersecano**.

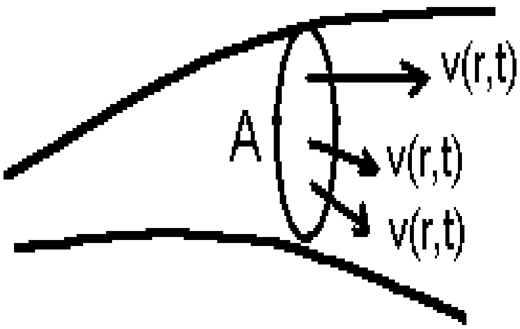
Infatti se cosi' accadesse la particella di fluido, giunta al punto di intersezione potrebbe proseguire o in una direzione o nell'altra, quindi la sua traiettoria non sarebbe univocamente definita.

- un insieme di linee di flusso forma un **tubo di flusso**



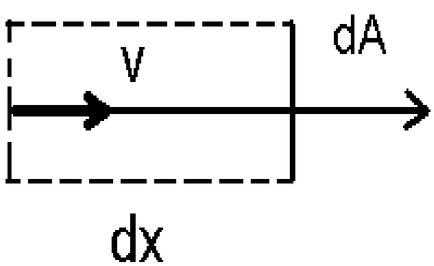
FLUSSO

Consideriamo un tubo di flusso. Vogliamo calcolare quanta massa passa attraverso la sezione **A** nell'unita' di tempo



Notare che le velocita' possono essere diverse da punto a punto della sezione.

Dividiamo la sezione **A** in tanti elementi **dA** tali che le velocita' delle particelle di fluido che le attraversano possa essere considerate costanti. Supponiamo che queste velocita' siano perpendicolari a **dA**, come in figura.



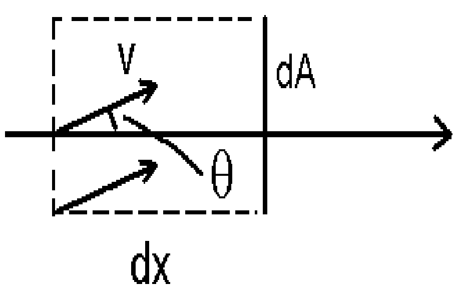
In un tempo dt, tutte le particelle che si trovano nel volumetto che ha per base **dA** e per altezza

$$dx = vdt$$

attraverseranno **dA**, quindi, se $\boldsymbol{\rho}$ e' la densita' del fluido, la massa che fluisce nel tempo dt sara'

$$dm = \boldsymbol{\rho}\ dx\ \mathbf{dA} = \boldsymbol{\rho}\ vdt\ \mathbf{dA}$$

Se invece le velocita' formano un angolo θ con l'asse x, nel tempo dt attraverseranno **dA** tutte le particelle che si trovano nel volumetto che ha per base **dA** e per altezza



$$dx = v_x dt = v\ cos\ \theta dt$$

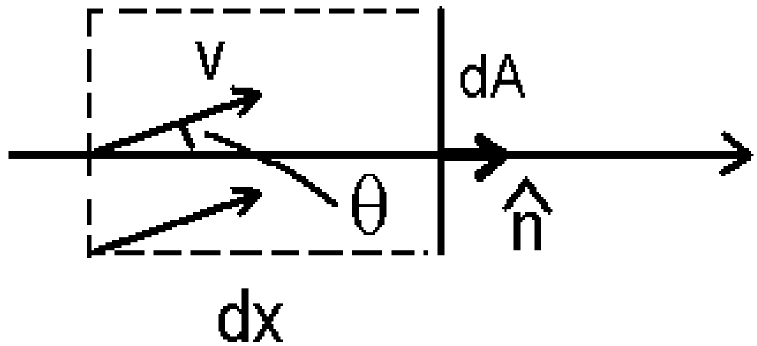
quindi

$$dm = \boldsymbol{\rho} v\ cos\ \theta dt\ \mathbf{dA}$$

Le due relazioni precedenti si possono dunque compendiare nella seguente equazione

$$dm = \boldsymbol{\rho}\, \vec{v} \cdot \hat{n} dt\ \mathbf{dA}$$

dove $\hat{n}$ e' il versore normale alla superficie **dA**



Quindi la massa che attraversa **dA** per unita' di tempo e'

$$\frac{dm}{dt} = \boldsymbol{\rho}\, \vec{v} \cdot \hat{n}\ \mathbf{dA}$$

e quella che attraversa la sezione finita **A** del tubo di flusso e'

$$\frac{dm}{dt} = \boldsymbol{\rho} \int_{\mathbf{A}} \vec{v} \cdot \hat{n}\ \mathbf{dA}$$

Attenzione: abbiamo assunto $\boldsymbol{\rho}$ =costante.
La grandezza

$$\Phi_A(\vec{v}) = \int_{\mathbf{A}} \vec{v} \cdot \hat{n}\ \mathbf{dA}$$

e' detta **flusso del vettore $\vec{v}$ attraverso la superficie A**

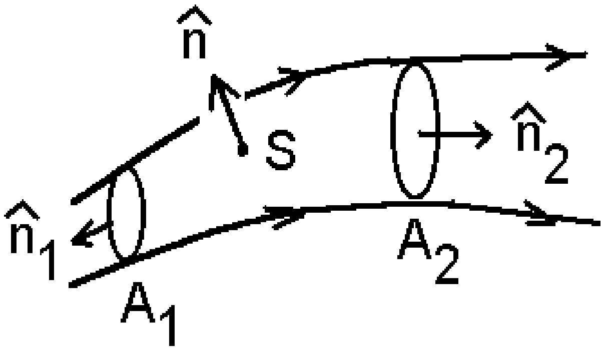
DIMENSIONI

$$[\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{v}})] = [\mathbf{vA}] = [\mathbf{lt^{-1}l^2}] = [\mathbf{l^3t^{-1}}].$$

LEGGE DELLA PORTATA (equazione di continuita')

$$\frac{dm}{dt} = \boldsymbol{\rho} \int_{\mathbf{A}} \vec{v} \cdot \hat{n} \, \mathbf{dA}$$

Consideriamo un tubo di flusso, e prendiamo una porzione di esso. Questa sara' delimitata da una superficie chiusa formata dalle due basi A_1 e A_2, e dalla superficie laterale S



Calcoliamo la massa che fluisce nell'unita' di tempo attraverso la superficie chiusa $A_1 + A_2 + S$

$$\frac{dm}{dt} = \boldsymbol{\rho} \left[\int_{\mathbf{A_1}} \vec{v} \cdot \hat{n}_1 \, \mathbf{dA} + \int_{\mathbf{A_2}} \vec{v} \cdot \hat{n}_2 \, \mathbf{dA} + \int_{\mathbf{S}} \vec{v} \cdot \hat{n} \, \mathbf{dA} \right]$$

L'ultimo termine e' zero, perche' il vettore normale a S e' perpendicolare alla velocita' del fluido, quindi

$$\frac{dm}{dt} = \boldsymbol{\rho} \left[\int_{\mathbf{A_1}} \vec{v} \cdot \hat{n}_1 \, \mathbf{dA} + \int_{\mathbf{A_2}} \vec{v} \cdot \hat{n}_2 \, \mathbf{dA} \right]$$

Se il fluido e' **incomprimibile**, la massa che e' contenuta nella porzione di fluido considerata deve essere costante (tanta ne esce tanta ne entra), cioe'

$$\frac{dm}{dt} = 0 \;\rightarrow\; \int_{\mathbf{A_1}} \vec{v} \cdot \hat{n}_1 \, \mathbf{dA} = -\int_{\mathbf{A_2}} \vec{v} \cdot \hat{n}_2 \, \mathbf{dA}$$

Se assumiamo per semplicita' che la velocita' del fluido sia costante e parallela ai versori $\hat{n}_1$ e $\hat{n}_2$ sulle sezioni di base, l'integrale si esegue facilmente e si trova

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \;\rightarrow\; \Phi_A(\vec{v}) = costante$$

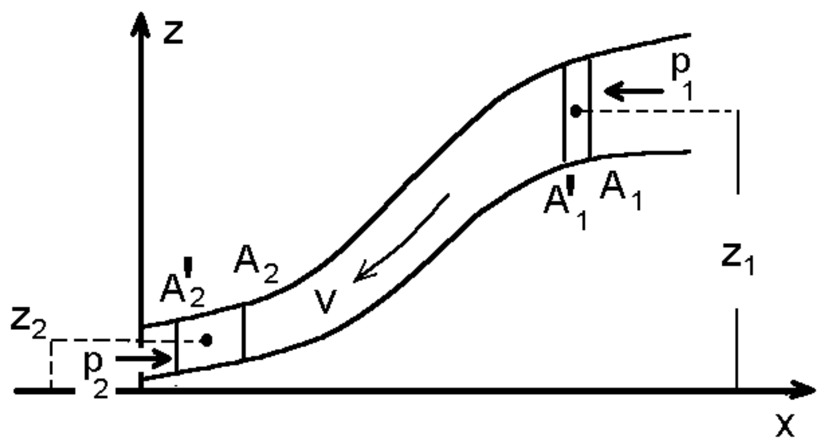
La quantita' $\mathbf{vA}$ si dice **portata**. Dall'ipotesi che il fluido sia **incomprimibile** segue dunque che **la portata e' costante.** **Quindi, se la sezione del condotto aumenta, la velocita' deve diminuire.**

TEOREMA DI BERNOULLI

Consideriamo un fluido che scorra in un condotto.

IPOTESI:

- il fluido e' incomprimibile
- il fluido non e' viscoso
- il moto e' stazionario, cioe' presa una qualsiasi sezione del condotto, la velocita' delle particelle che la attraversano e' costante. ATTENZIONE: costante vuol dire che non varia nel tempo, ma puo' essere diversa da punto a punto della sezione.



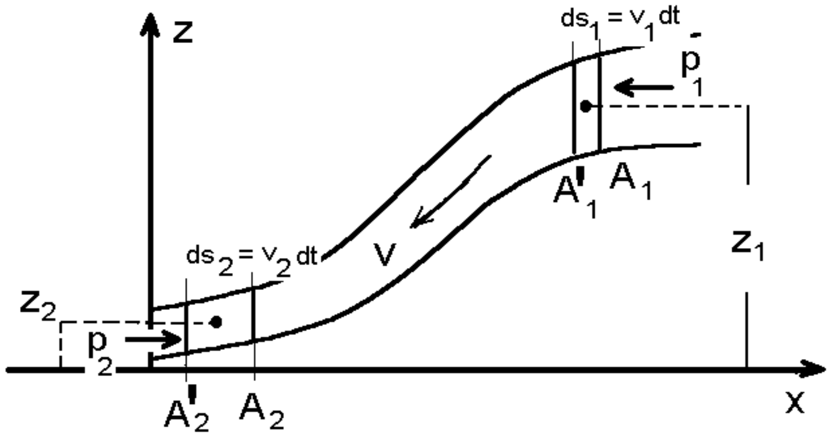
Consideriamo una porzione di fluido compresa tra A_1 e A_2. Dopo un intervallo di tempo dt questa si sara' spostata tra A'_1 e A'_2. Dato che il fluido e' incomprimibile, la parte di fluido compresa tra A'_1 e A_2 sara' rimasta la stessa, quindi

$$dm\ (tra\ A_1\ e\ A'_1) = dm\ (tra\ A_2\ e\ A'_2)$$

In pratica l'effetto complessivo del moto del fluido nel tempo dt e' quello di spostare l'elemento di fluido di massa dm, o meglio, il suo centro di massa, dalla quota z_1 alla quota z_2.

Per il teorema dell'energia cinetica, il lavoro totale delle forze e' uguale alla variazione di energia cinetica dell'elemento di fluido $\Delta E_c = \frac{1}{2}\ dm\ v_2^2 - \frac{1}{2}\ dm\ v_1^2$

$$L_{tot} = \frac{1}{2}\ dm\ v_2^2 - \frac{1}{2}\ dm\ v_1^2$$



Il fluido si muove sotto l'azione della forza peso e delle forze dovute alla pressione del fluido, cioe' $\mathbf{F_1 = P_1 A_1}$, che "spinge" l'elemento di fluido a quota z_1 e $\mathbf{F_2 = P_2 A_2}$ che "si oppone" al moto dell'elemento di fluido a quota z_2. Il lavoro di queste forze e'

- $L_{F_{press}} = P_1\ A_1\ ds_1 - P_2\ A_2\ ds_2$
- $L_{grav} = -\Delta U = dmgz_1 - dmgz_2$

quindi $L_{tot} = L_{F_{press}} + L_{grav}$, e

$$P_1\ A_1\ ds_1 - P_2\ A_2\ ds_2 + dmgz_1 - dmgz_2 = \frac{1}{2}\ dm\ v_2^2 - \frac{1}{2}\ dm\ v_1^2.$$

Ricordiamo che $A_1\ ds_1$ e $A_2\ ds_2$ sono i volumi delle due porzioni di fluido a quota z_1 e z_2, e che entrambi i volumi contengono la stessa massa dm, quindi

$$dm = \rho\ A_1\ ds_1 = \rho\ A_2\ ds_2\ \rightarrow\ \begin{cases} A_1\ ds_1 = \frac{dm}{\rho} \\ A_2\ ds_2 = \frac{dm}{\rho} \end{cases}$$

quindi sostituendo

$$P_1\ \frac{dm}{\rho} - P_2\ \frac{dm}{\rho} + dmgz_1 - dmgz_2 = \frac{1}{2}\ dm\ v_2^2 - \frac{1}{2}\ dm\ v_1^2.$$

A questo punto dividiamo tutto per dm e per g e troviamo

$$\frac{P_1}{\rho g} - \frac{P_2}{\rho g} + z_1 - z_2 = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g},$$

e portando a primo membro tutti i termini con indice 1 e a secondo membro quelli con indice 2

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}$$

Siccome questo procedimento si puo' applicare a qualsiasi sezione del fluido, concludiamo che

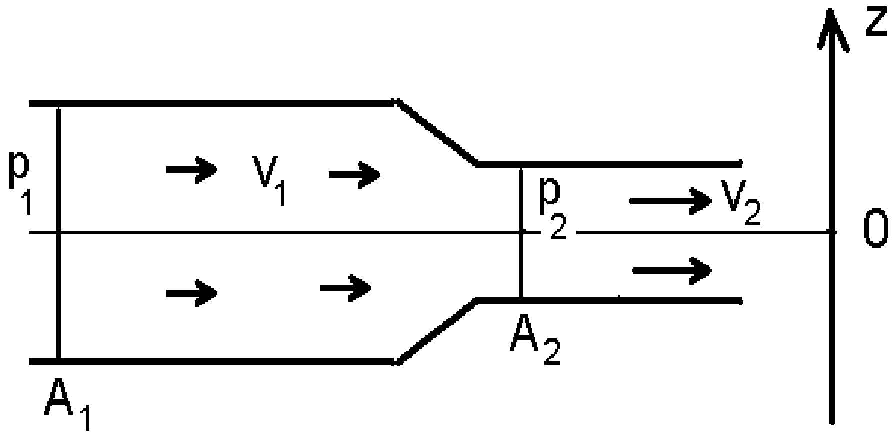
$$z + \frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = costante$$

Questa equazione esprime il **teorema di Bernoulli**.
Il termine $\frac{v^2}{2g}$ viene chiamato **altezza di arresto**, perche' e' l'altezza a cui si fermerebbe un grave lanciato verso l'alto con velocita' iniziale v_1.

- Se il fluido fosse stato viscoso, nell'applicare il teorema dell'energia cinetica avremmo dovuto considerare il lavoro fatto dalle forze di resistenza del mezzo.
- Se il moto del fluido non fosse stato stazionario, le velocita' attraverso una data sezione sarebbero variate nel tempo; in questo caso non avremmo saputo che valori assegnare alle velocita' v_1 e v_2, se non conoscendone l' andamento temporale specifico.

Applicazioni del teorema di Bernoulli
1) EFFETTO VENTURI

Consideriamo un tubo in cui scorra un fluido di densita' ρ, e siano A_1 e A_2 le due sezioni indicate in figura



Applichiamo il teorema di Bernoulli alle due sezioni; tenendo conto del fatto che sono alla stessa quota, troviamo

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}$$

e quindi

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{P_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2}$$

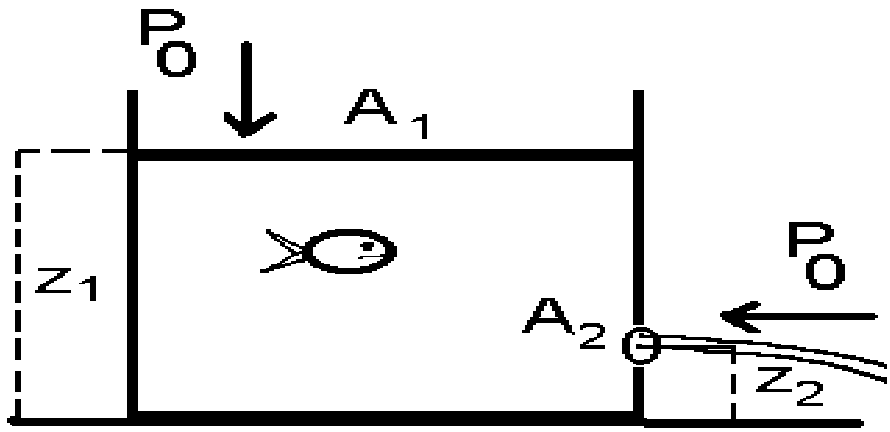
questa equazione mostra che se $v_2 > v_1$ allora $P_2 < P_1$; siccome per un fluido incomprimibile la portata e' costante, cioe'

$$A_1\ v_1 = A_2\ v_2,$$

$v_2 > v_1$ se $A_2 < A_1$; quindi se il condotto si restringe la velocita' cresce e la pressione diminuisce. In base a questo principio segue anche che se in una vena si produce un aneurisma, cioe' la vena aumenta di sezione, la velocita' con cui scorre il sangue diminuisce, e la pressione aumenta, provocando un ulteriore allargamento.

Applicazioni del teorema di Bernoulli
2) VELOCITA' DI EFFLUSSO

Si consideri un recipiente riempito con un fluido. Supponiamo che la superficie libera del fluido si trovi all'altezza z_1, abbia sezione A_1 e sia soggetta alla pressione atmosferica. A un'altezza z_2 si pratica un foro di sezione A_2. Si vuole calcolare con che velocita' il fluido esce dal foro.



Poiche' la pressione esercitata sulle due sezioni e' pari alla pressione atmosferica

$$z_1 + \frac{P_0}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_0}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g},$$

dove v_1 e' la velocita' con cui si abbassa la superficie del fluido, e v_2 e' la velocita' con cui il fluido fuoriesce, quindi

$$\frac{v_2^2}{2g} = (z_1 - z_2) + \frac{v_1^2}{2g} \;\rightarrow\; v_2^2 = 2g(z_1 - z_2) + v_1^2$$

cioe' la velocita' con cui il fluido fuoriesce e' pari a quella con cui si abbassa la superficie, piu' quella che avrebbe l'acqua se cadesse direttamente dalla quota $(z_1 - z_2)$.

Cosa cambia se c'e' viscosita'?

Supponiamo che una sfera di raggio r cada in un fluido viscoso. Essa sara' soggetta a una forza di attrito il cui modulo, per basse velocita', si puo' schematizzare cosi' (**formula di Stokes**)

$$F = 6\pi\ r\ \boldsymbol{\eta}\ v$$

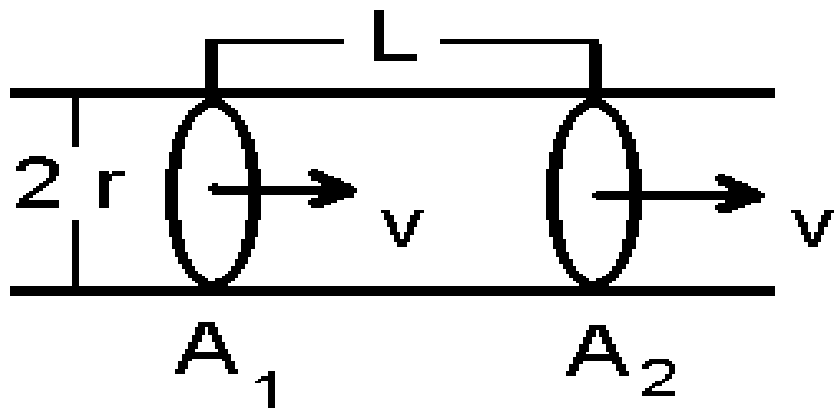
il coefficiente $\boldsymbol{\eta}$ e' detto **viscosita'** e dipende dal fluido e dalla temperatura (diminuisce con la temperatura). Le sue dimensioni sono

$$[\eta] = \frac{[F]}{[rv]} = \frac{[F][t]}{[l^2]} = [Pt]$$

quindi le unita' di misura sono Pascal$\cdot$ secondo. Ad esempio, a 20^oC la viscosita' dell'acqua e' di 10^{-3} Pa s, mentre quella del sangue e' circa tre volte piu' grande.

Supponiamo che un fluido viscoso e incomprimibile scorra in un condotto orizzontale.

- A basse velocita', gli strati di fluido scorrono lentamente gli uni sugli altri e la forza d'attrito viscoso e' proporzionale alla velocita'. Questo regime si dice di **flusso laminare**.



consideriamo un tratto di condotto di lunghezza L. Essendo il fluido incomprimibile, la portata e' costante, ed essendo costante la sezione del tubo questo implica che la velocita' attraverso una sezione qualsiasi deve essere la stessa. Di conseguenza, se fossimo in regime "alla Bernoulli", le pressioni P_1 e P_2 sarebbero uguali. Invece, a causa della viscosita' si ha una caduta di pressione pari a

$$\Delta P = \boldsymbol{\eta} \frac{8}{\pi} L \frac{Av}{r^4}$$

dove r e' il raggio del tubo, e Av e' la portata. Questa e' la **Legge di Poiseuille**.

Se la velocita' del fluido cresce, superato un valore di soglia che dipende dalla temperatura, dalla sezione del condotto e dal tipo di fluido, la forza d'attrito viscoso diventa proporzionale al quadrato della velocita', il fluido entra in un **regime turbolento** e il moto degli elementi di fluido diventa vorticoso.