

METODI MATEMATICI PER L'INFORMATICA

ANNO ACCADEMICO 2011/2012

SOMMARIO. Limitazioni della Logica Proposizionale e introduzione del linguaggio della Logica Predicativa.

1. LIMITAZIONI ESPRESSIVE DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE

In questa sezione cerchiamo di motivare la necessità di estendere la logica proposizionale. Procediamo così: analizziamo alcuni esempi abitualmente usati per illustrare le limitazioni della logica proposizionale. Ne diamo formalizzazioni proposizionali e analizziamo in quali casi e sotto quali aspetti queste formalizzazioni sono carenti. Vediamo in che senso la logica predicativa supplisce a queste carenze. Motiviamo attraverso esempi i costrutti fondamentali della logica predicativa: costanti, variabili, quantificatori, predicati, relazioni, funzioni.

Esempio 1.1. Il seguente è un classico esempio che viene presentato per illustrare le limitazioni della logica proposizionale (vedi e.g., E. Mendelson, *Introduzione alla Logica Matematica*).

Ogni amico di Marco è amico di Pietro.

Claudio non è amico di Pietro.

Dunque Claudio non è amico di Marco.

Proponiamo la seguente formalizzazione in logica proposizionale. È naturale assumere che il dominio di discorso di interesse per questo esempio, ossia l'insieme degli esseri umani, è un dominio finito. Sia U il numero degli esseri umani. Usiamo un linguaggio composto da variabili $p_{i,j}$, che intuitivamente stanno per “ i è amico di j ”, dove i, j variano su un insieme finito di indici $\{1, \dots, U\}$. Assumiamo inoltre che nella numerazione $\{1, \dots, U\}$ degli esseri umani Marco sia il numero 1, Pietro il numero 2 e Claudio il numero 3. Possiamo allora formalizzare l'argomento precedente come segue, riducendo le quantificazioni universali a congiunzioni.

$$(p_{1,1} \rightarrow p_{1,2}) \wedge (p_{2,1} \rightarrow p_{2,2}) \wedge \dots \wedge (p_{U,1} \rightarrow p_{U,2}) \\ \neg p_{3,2} \\ \neg p_{3,1}$$

Si verifica facilmente che le prime due proposizioni implicano logicamente la terza.

Esempio 1.2. Un altro esempio classico che viene fornito per illustrare le limitazioni della logica proposizionale è il seguente sillogismo aristotelico.

Tutti gli uomini sono mortali.

Socrate è un uomo.

Dunque Socrate è mortale.

Proponiamo la seguente formalizzazione in logica proposizionale. Osserviamo che è ragionevole supporre che

- Il numero degli individui esistenti è finito, sia V il loro numero.
- Il numero degli esseri umani è finito, sia U il loro numero.
- Il numero degli esseri mortali è finito, sia M il loro numero.

Supponiamo inoltre che, nella numerazione delle cose esistenti, Socrate sia la numero $i_s \in \{1, \dots, V\}$. Usiamo un linguaggio proposizionale con le seguenti variabili

$$u_{i,j}, i \in \{1, \dots, V\}, j \in \{1, \dots, U\}, (\text{la cosa } i \text{ è l'uomo } j) \\ m_{i,h}, i \in \{1, \dots, V\}, h \in \{1, \dots, M\}, (\text{la cosa } i \text{ è il mortale } h)$$

Note preparate da Lorenzo Carlucci, carlucci@di.uniroma1.it.

Formalizziamo la prima premessa “Tutti gli uomini sono mortali” come “Se qualcosa è un uomo allora quel qualcosa è mortale”. Possiamo usare la proposizione seguente.

$$\begin{aligned} (u_{1,1} \vee u_{1,2} \vee \dots \vee u_{1,U}) &\rightarrow (m_{1,1} \vee m_{1,2} \vee \dots \vee m_{1,M}) \\ \wedge(u_{2,1} \vee u_{2,2} \vee \dots \vee u_{2,U}) &\rightarrow (m_{2,1} \vee m_{2,2} \vee \dots \vee m_{2,M}) \\ &\dots \\ \wedge(u_{V,1} \vee u_{V,2} \vee \dots \vee u_{V,U}) &\rightarrow (m_{V,1} \vee m_{V,2} \vee \dots \vee m_{V,M}) \end{aligned}$$

Possiamo formalizzare la seconda proposizione come “Socrate è uno degli uomini”, ossia:

$$(u_{i_s,1} \vee \dots \vee u_{i_s,U})$$

e la conclusione come “Socrate è uno dei mortali”, ossia:

$$(m_{i_s,1} \vee \dots \vee m_{i_s,M})$$

Si verifica facilmente che la conclusione è una conseguenza logica delle due premesse.

Perché le formalizzazioni proposte non sono soddisfacenti? Perché gli esempi di sopra ci indicano che dobbiamo estendere la logica proposizionale? Consideriamo due nuove versioni degli esempi fatti.

Esempio 1.1 (Revisited)

Consideriamo la seguente variante dell'Esempio 1.1.

Ogni numero intero inferiore a 5 è inferiore a 10.

20 non è inferiore a 10

Dunque 20 non è inferiore a 5

La struttura dell'argomento è identica a quella dell'Esempio 1. Cosa succede se proviamo a formalizzarlo in logica proposizionale come abbiamo fatto per l'Esempio 1? La differenza fondamentale è che il dominio del discorso in questo caso consiste di un numero infinito di elementi (gli interi). Per formalizzare la prima premessa (con quantificazione universale) dovremmo allora usare congiunzioni infinite, o perlomeno usare un insieme infinito di premesse, e.g.,

$$(p_{-100,5} \rightarrow p_{-100,10}), (p_{-99,5} \rightarrow p_{-99,10}), (p_{-98,5} \rightarrow p_{-98,10}) \dots$$

dove usiamo la variabile $p_{i,j}$ con $i, j \in \mathbf{Z}$ per indicare che “ $i < j$ ”. Qui osserviamo un primo limite concreto della logica proposizionale. Per esprimere una quantificazione su un dominio infinito abbiamo bisogno di infinite proposizioni.

Esempio 1.2 (Revisited)

Una seconda osservazione riguarda l'Esempio 2. In questo caso il problema è che gli insiemi delle cose viventi, degli uomini e delle cose mortali sono insiemi *dinamici*, ossia variano nel tempo (gli uomini nascono e muoiono). Ma è chiaro che non vogliamo che la validità dell'argomento dell'Esempio 2 dipenda da quali uomini esistono in un determinato momento. La validità dell'Esempio 2 dipende dalla relazione tra i *concetti* di “uomo”, “mortale” e “vivente”. Se adottassimo la formalizzazione in logica proposizionale proposta sopra dovremmo aggiornare le nostre premesse ogni volta che nasce un nuovo uomo o che muore un nuovo essere mortale. Dovremmo ogni volta aggiornare le nostre numerazioni di questi insiemi finiti. Questo è ovviamente poco desiderabile.

Vediamo come la logica predicativa risponde esattamente ai problemi che sono emersi dall'analisi degli esempi precedenti, ossia

- (1) Permette di esprimere quantificazioni su domini infiniti con singole proposizioni finite.
- (2) Permette di distinguere le relazioni tra i concetti (proprietà) dalle relazioni tra gli individui.

A livello formale questo si esprime con l'introduzione di **costanti**, **variabili**, **quantificatori** e **predicati**. Le costanti (che denoteremo per il momento con a, b, c, d, \dots) vanno lette come nomi propri per individui del dominio di discorso. Le variabili (che denoteremo per il momento con x, y, z, w, \dots) e i quantificatori (universale \forall ed esistenziale \exists) permettono di esprimere quantificazioni su domini finiti o infiniti. I simboli di predicato, che denoteremo con P, Q, R permettono di rendere esplicita la distinzione tra concetti (proprietà) e individui. I simboli di predicato vengono usati in combinazione con i simboli che denotano

individui (variabili e costanti) in espressioni formali di tipo $P(x)$ o $P(c)$, da leggersi come “l'oggetto x ha la proprietà P ”, o “ x è un P ” (e analogamente per c).

Torniamo ora ai nostri esempi problematici e formalizziamoli nel nuovo linguaggio.

Formalizzazione predicativa dell'Esempio 1.1, (versione 1). Prima di tutto dobbiamo scegliere un linguaggio opportuno. In particolare scegliere quanti predicati e quante costanti utilizzare. Possiamo analizzare la prima premessa come segue: Se un individuo ha la proprietà “Essere amico di Marco” allora quell'individuo ha la proprietà “Essere amico di Pietro”. La seconda premessa si può analizzare come: L'individuo “Claudio” non ha la proprietà “Essere amico di Pietro”. La terza premessa si può analizzare come: L'individuo “Claudio” non ha la proprietà “Essere amico di Marco”. Questa analisi ci suggerisce che abbiamo bisogno di

- (1) Un simbolo di costante c per l'individuo Claudio,
- (2) Un simbolo di predicato AM per la proprietà Essere amico di Marco,
- (3) Un simbolo di predicato AP per la proprietà Essere amico di Pietro.

Possiamo allora formalizzare l'argomento come segue.

$$\begin{aligned} \forall x(AM(x) \rightarrow AP(x)) \\ \neg AP(c) \\ \neg AM(c) \end{aligned}$$

Le regole della logica predicativa che svilupperemo saranno tali da rendere l'argomento logicamente valido (nel nuovo senso, da definire).

Formalizzazione predicativa dell'Esempio 1.1, (versione 2). Consideriamo ora la variante numerica dell'Esempio 1. Scegliamo un linguaggio opportuno. Possiamo analizzare la prima premessa come segue: Se un individuo ha la proprietà “Essere inferiore a 5” allora quell'individuo ha la proprietà “Essere inferiore a 10”. La seconda premessa si può analizzare come: L'individuo “20” non ha la proprietà “Essere inferiore a 10”. La terza premessa si può analizzare come: L'individuo “20” non ha la proprietà “Essere inferiore a 5”. Questa analisi ci suggerisce che abbiamo bisogno di

- (1) Un simbolo di costante v per l'individuo 20,
- (2) Un simbolo di predicato $Inf5$ per la proprietà Essere inferiore a 5,
- (3) Un simbolo di predicato $Inf10$ per la proprietà Essere inferiore a 10.

Possiamo allora formalizzare l'argomento come segue.

$$\begin{aligned} \forall x(Inf5(x) \rightarrow Inf10(x)) \\ \neg Inf10(v) \\ \neg Inf5(v) \end{aligned}$$

Abbiamo così ovviato al problema di formalizzare la quantificazione infinita con una proposizione finita. Si osserva facilmente che la versione formale appena proposta è identica alla versione formale dell'Esempio 1 proposta sopra a meno dei nomi dei predicati e delle costanti. I due argomenti sono infatti identici, ossia hanno la stessa forma logica.

Formalizzazione predicativa dell'Esempio 1.1, (versione 3). La formalizzazione dell'Esempio 1 e dell'Esempio 2 proposta qui sopra è corretta ma si può migliorare. Nell'Esempio 1 è chiaro che i predicati “Essere amico di Marco” e “Essere amico di Pietro” hanno qualcosa in comune, e lo stesso vale per i predicati “Essere inferiore a 5” e “Essere inferiore a 10” nell'Esempio 2. È naturale che questa comunanza venga rispecchiata nel nostro linguaggio formale. A questo scopo estendiamo il concetto di predicato a quello di “predicato a più variabili”, o “relazione” e introduciamo nel linguaggio simboli per predicati di questo nuovo tipo. Un'espressione di tipo $P(x, y)$ sarà letta come gli oggetti x, y stanno nella relazione P . Il nostro linguaggio può ora contenere simboli di predicato con qualunque numero finito di variabili. Un'espressione di tipo $R(x_1, \dots, x_n)$ sarà letta come “Gli individui indicati da x_1, \dots, x_n stanno nella relazione R ”. Possiamo allora proporre una nuova formalizzazione degli Esempi 1 e 2 usando il seguente linguaggio.

- (1) Un simbolo di predicato $P(x, y)$ a due posti,
- (2) Tre simboli di costante a, b, c .

Per l'Esempio 1 $P(x, y)$ viene letto come “ x è amico di y ”, a come Marco, b come Pietro e c come Claudio. Per l'Esempio 2 $P(x, y)$ viene letto come “ x è inferiore a y ”, a come 5, b come 10 e c come 20. La versione formalizzata dei due Esempi è la seguente.

$$\begin{aligned} \forall x(P(x, a) \rightarrow P(x, b)) \\ \neg P(c, b) \\ \neg P(c, a) \end{aligned}$$

Osservazione 1.3. Abbiamo discusso sopra alcuni esempi numerici e abbiamo scelto di introdurre costanti (nomi propri) per denotare singoli numeri. Questo è corretto ma si può fare di meglio. Da una parte è poco economico introdurre infiniti nomi propri distinti. Dall'altra, usare una costante c per il numero 20 e una costante a per il numero 21 nasconde la relazione strutturale tra 20 e 21, ossia il fatto che il secondo si ottiene dal primo aggiunge 1. In fin dei conti è ovvio che tutti i numeri naturali maggiori di 0 si possono scrivere come somme di 1! Potrebbe essere utile rispecchiare questa struttura nel nostro nuovo linguaggio. A questo scopo introduciamo un nuovo tipo di simboli, i simboli di funzione. Come i predicati, questi simboli possono avere uno, due, tre, o n posti (argomenti). A differenza dei predicati, che si usano in espressioni del tipo $P(x)$ per asserire una proposizione sensata del tipo “ x è un P ”, i simboli di funzione si usano per formare *nuovi nomi propri*. Per esempio, il numero 4 può essere indicato come $1 + 1 + 1 + 1$, o come $2 + 2$ o come $2 \cdot 2$, o come 2^2 . Questi quattro nomi propri sono formati da costanti (1, 2) e funzioni (+, ·, x^y). A livello formale introdurre nel linguaggio un simbolo di funzione per rappresentare, e.g., l'addizione, significa specificare un simbolo, per esempio “ p ” da usare in espressioni del tipo “ $p(c, y)$ ”, dove i due argomenti del simbolo di funzione p possono essere costanti (come c) o variabili come y . L'espressione $p(c, y)$ va letta come “Il risultato di applicare la funzione denotata dal simbolo p agli individui denotati dalla costante c e dalla variabile y ”. Un'espressione ottenuta applicando un simbolo di funzione a variabili o costanti è detta un **termine**. Un termine non contiene variabili è detto un **termine chiuso**. I termini chiusi sono da intendere come nomi propri composti per individui del dominio del discorso. L'interpretazione di tali termini è fissata una volta che è fissata l'interpretazione delle costanti e dell'operazione associata al simbolo di funzione. Ammettere variabili nei termini è una convenienza tecnica.

Formalizzazione predicativa dell'Esempio 1.1, (versione 4). Tornando ai nostri esempi numerici, è naturale usare un linguaggio con due soli costanti 0 e 1 e un simbolo di operazione p a due posti che formalizza la somma. Possiamo allora scrivere 2 come $p(1, 1)$, 3 come $p(1, p(1, 1))$, 4 come $p(1, p(1, p(1, 1)))$ o anche come $p(p(1, 1), p(1, 1))$, e così via. Spesso scriviamo $x + y$ invece di $p(x, y)$, per migliorare la leggibilità (a costo di favorire qualche confusione!). Inoltre, per non scrivere per esteso lunghe somme formali, usiamo \bar{n} per indicare il termine ottenuto applicando alla costante 1 il simbolo di funzione p per n volte!

Con questo nuovo linguaggio l'Esempio 1 si formalizza come segue.

$$\begin{aligned} \forall x(P(x, \bar{5}) \rightarrow P(x, \bar{10})) \\ \neg P(\bar{20}, \bar{10}) \\ \neg P(\bar{20}, \bar{5}) \end{aligned}$$

Esempio 1.4. Consideriamo il seguente argomento.

Ogni multiplo di 100 è multiplo di 10.
25 non è multiplo di 10.
Dunque 25 non è multiplo di 100.

Potremmo formalizzare questo esempio esattamente come abbiamo fatto per l'esempio precedente, formalizzando il concetto “Essere multiplo di” con un simbolo di relazione a due posti $P(x, y)$. Si può fare di meglio. Ovviamente il concetto “Essere multiplo di” si può analizzare ulteriormente. Abbiamo infatti che, per $m, n \in \mathbf{N}$ vale che m è multiplo di n se e soltanto se esiste $a \in \mathbf{N}$ tale che $m = n \cdot a$. Possiamo esprimere nel nostro nuovo linguaggio questa condizione, come segue, introducendo un nuovo simbolo di funzione, *mult* a due posti, e un nuovo simbolo = per indicare l'identità.

$$\exists z(x = \text{mult}(y, z)).$$

L'argomento si formalizza allora come segue.

$$\begin{aligned} \forall x(\exists z(x = \text{mult}(\overline{100}, z)) \rightarrow \exists z(x = \text{mult}(\overline{10}, z))) \\ \neg \exists z(25 = \text{mult}(\overline{10}, z)) \\ \neg \exists z(25 = \text{mult}(\overline{100}, z)) \end{aligned}$$

In conclusione, è opportuno includere nel linguaggio della logica predicativa i seguenti tipi di simboli.

- (1) Costanti a, b, c, d , etc.,
- (2) Variabili x, y, z, w , etc.,
- (3) Quantificatori \forall, \exists ,
- (4) Simboli per predicati a uno o più posti $P(x), R(x, y), Q(x, y, z)$ etc.,
- (5) Simboli per funzioni a uno o più posti $p(x), f(x, y), g(x, y, z)$, etc.,
- (6) Un simbolo per l'identità, $=$.

Osservazione 1.5. Dato che l'identità è una relazione a due posti e le funzioni a n -argomenti sono completamente descritte dal loro grafico che è una relazione a $n + 1$ posti, si potrebbe fare a meno di avere simboli speciali per questo tipo di oggetti. È però naturale avere simboli di funzione nel linguaggio ed è opportuno avere il simbolo di identità da interpretare come l'identità nel dominio di discorso (per motivi che potremmo discutere solo più avanti).