Metodi Matematici per l'Informatica (Canale P-Z) - AA 2008-09

Massimo Lauria

15/1/2009

Esercizi del giorno 15/1/2008

Tavole di verità

Problema 1. *Svolgere gli esercizi 133, 134, 135.*

Tableau e Tavole di Verità nel calcolo degli enunciati

Problema 2. *Verificare la correttezza della legge di De Morgan con il metodo dei tableau semantici (esercizio 137).*

SOLUZIONE:

$$
\begin{array}{cccc}
\multicolumn{4}{c}{\underline{\neg}((\neg(p \wedge q))\underline{\leftrightarrow}(\neg p \vee \neg q))} \\
\multicolumn{2}{c}{\underline{\neg\neg}(p \wedge q), \neg p \vee \neg q} & \multicolumn{2}{c}{\neg(p \wedge q), \underline{\neg}(\neg p\underline{\vee}\neg q)} \\
\multicolumn{2}{c}{|} & \multicolumn{2}{c}{|} \\
\multicolumn{2}{c}{p\underline{\wedge}q, \neg p \vee \neg q} & \multicolumn{2}{c}{\neg(p \wedge q), \underline{\neg\neg}p, \neg\neg q} \\
\multicolumn{2}{c}{|} & \multicolumn{2}{c}{|} \\
\multicolumn{2}{c}{p, q, \neg p\underline{\vee}\neg q} & \multicolumn{2}{c}{\neg(p \wedge q), p, \underline{\neg\neg}q} \\
p, q, \neg p & p, q, \neg q & \multicolumn{2}{c}{|} \\
\diamond & \diamond & \multicolumn{2}{c}{\underline{\neg}(p\underline{\wedge}q), p, q} \\
 & & \neg p, p, q & \neg q, p, q \\
 & & \diamond & \diamond
\end{array}
$$

Problema 3. *Dimostrare il principio di ragionamento per assurdo attraverso il metodo dei tableau e delle tavole di verità. La formula del ragionamento per assurdo è*

$$(\neg A \to A) \to A$$

SOLUZIONE: Il tableu:

$$
\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{c}{\underline{\neg}((\neg A \to A)\underline{\to}A)} \\
\multicolumn{2}{c}{|} \\
\multicolumn{2}{c}{\neg A\underline{\to}A, \neg A} \\
\underline{\neg\neg}A, \neg A & A, \neg A \\
| & \diamond \\
A, \neg A & \\
\diamond &
\end{array}
$$

La tabella di verità è semplicissima.

A	$\neg A \to A$	$(\neg A \to A) \to A$
F	F	V
V	V	V

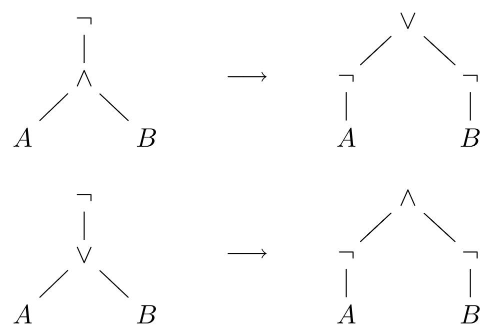
Problema 4. *Quante righe contiene la tavola di verità delle seguenti formule? E quanto è grande invece il tableu? Qual è tra i due il sistema più efficiente per dimostrare una formula?*

$$
\begin{aligned}
&(p \to q) \to (\neg q \to \neg p) \\
&((p \to q) \to (\neg q \to \neg p) \vee s_1 \\
&((p \to q) \to (\neg q \to \neg p) \vee s_1 \vee s_2 \\
&\vdots \\
&((p \to q) \to (\neg q \to \neg p) \vee s_1 \vee s_2 \vee \ldots \vee s_i \\
&\vdots \\
&((p \to q) \to (\neg q \to \neg p) \vee s_1 \vee s_2 \vee \ldots\ldots \vee s_n
\end{aligned}
$$

Soluzione: La tabella di verità della i-esima formula necessita di 2^{i+2} righe. Il tableau più naturale è costituito da circa 6 righe, per tutte le formule. È quindi evidente che in questo caso il tableau è meno efficiente. In particolare la tabella deve verificare tutti i casi possibili, mentre il tableau può unificare più casi che si comportano allo stesso modo.

Problema 5. *Dimostrare che ogni formula proposizionale definita con l'operatore* $\neg$ *ed i connettivi* $\{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$ *può essere scritta come una formula composta da soli* $\{\vee, \wedge\}$ *e negazioni immediatamente sopra variabili.*

Soluzione: Prima di tutto si osservi che le banali equivalenze logiche permettono di eliminare gli operatori $\to, \leftrightarrow$. In questo modo da una formula F si ottiene una formula G scritta esclusivamente con $\{\neg, \vee, \wedge\}$. A questo punto è semplice portare le negazioni verso il basso utilizzando le formule di De Morgan.



Calcolo dei predicati

Problema 6. *Definire in maniera chiara e non ambigua le seguenti espressioni nel calcolo dei predicati.*

- *Variabili libere*
- *Variabili legate*

Soluzione: Leggere paragrafo 9.1.3 del libro di testo.

Problema 7. *Definire in maniera chiara e non ambigua le seguenti espressioni nel calcolo dei predicati.*

- *Termine*
- *Formula*
- *Formula Chiusa*
- *Formula Aperta*
- *Interpretazione*
- *Formula Soddisfacibile (in un'interpretazione)*
- *Formula Vera (in un'interpretazione)*
- *Modello (in un'interpretazione)*
- *Conseguenza logica*
- *Tautologia o Formula Valida.*

SOLUZIONE: Leggere paragrafo 9.1.4 del libro di testo.

Problema 8. *Formalizzare le seguenti espressioni nella logica dei predicati di modo che siano vere nell'interpretazione dei numeri naturali. La in questa interpretazione relazione $y|x$ vuol dire "y divide x".*

1. *Il numero x è primo.*
2. *I numeri x e y sono coprimi.*
3. *z è il "massimo comune divisore" di x e y*
4. *Se x, y sono coprimi allora il loro massimo comune divisore è 1.*

SOLUZIONE:

1. $P(x)$ è codificato come:
$$\forall y(y|x \to (y = 1 \vee y = x))$$
2. $C(x, y)$ è codificato come:
$$\forall z((z|x \wedge z|y) \to z = 1)$$
3. La proprietà $MCD(x, y, z)$ è codificata da:
$$z|x \wedge z|y \wedge \forall u(u|x \wedge u|y \to u \leq z)$$
4. È sufficiente usare le precedenti proprietà:
$$(C(x, y) \wedge MCD(x, y, z)) \to z = 1$$