# METODI MATEMATICI PER L'INFORMATICA
# ESERICIZI DI LOGICA PROPOSIZIONALE

ANNO ACCADEMICO 2012/2013

Ricordiamo le definizioni fondamentali: $\Gamma \models A$ dove $\Gamma$ è un insieme (possibilmente vuoto) di proposizioni e $A$ è una proposizione vale se e solo se PER OGNI assegnamento $\alpha$, SE $\alpha$ soddisfa tutte le proposizioni in $\Gamma$, ALLORA $\alpha$ soddisfa $A$. Ci occupiamo solo dei casi in cui $\Gamma$ è un insieme finito $\{A_1, \dots, A_n\}$ e scriviamo $A_1, \dots, A_n \models A$ invece di $\{A_1, \dots, A_n\} \models A$. $A \equiv B$ vale se e solo se PER OGNI assegnamento $\alpha$, $\alpha(A) = \alpha(B)$. $A \in \textsc{Taut}$ se e solo se PER OGNI assegnamento $\alpha$, $\alpha(A) = 1$.

Nota Bene: dire che $A_1, \dots, A_n \not\models A$ vuol dire che ESISTE un assegnamento $\alpha$ che soddisfa tutte le $A_1, \dots, A_n$ e non soddisfa $A$. Dire che $A \not\equiv B$ vuol dire che ESISTE un assegnamento $\alpha$ tale che $\alpha(A) \neq \alpha(B)$. Se devo dimostrare che non vale una implicazione: SE $X$ ALLORA $Y$, devo far vedere che è possibile che si diano $X$ e non $Y$. Se devo dimostrare che non vale una doppia implicazione: $X$ se e solo se $Y$ basta dimostrare che non vale una delle due implicazioni: SE $X$ ALLORA $Y$ oppure SE $Y$ ALLORA $X$.

Una implicazione del tipo: SE $A_1, \dots, A_n \models A$ ALLORA $B_1, \dots, B_m \models B$ ha una struttura più complicata di quanto sembra. La premessa è *una implicazione quantificata universalmente*: PER OGNI assegnamento $\alpha$, SE $\alpha$ soddisfa tutte le $A_1, \dots, A_n$ ALLORA $\alpha$ soddisfa $A$). La conseguenza da dimostrare è un'altra *implicazione quantificata universalemente*: PER OGNI assegnamento $\alpha$, SE $\alpha$ soddisfa tutte le $B_1, \dots, B_m$, ALLORA $\alpha$ soddisfa $B$.

**Esercizio** I seguenti punti sono veri o falsi? In entrambi i casi dimostrare.

(1) $A, B \models C$ se e solo se $A \models (B \to C)$
(2) $A \models B$ e $B \models A$ se e solo se $A \equiv B$
(3) Se $A \models B$ o $A \models C$ allora $A \models (B \lor C)$
(4) Se $A \models B$ o $A \models C$ allora $A \models (B \land C)$
(5) Se $A \models B$ e $A \models C$ allora $A \models (B \lor C)$
(6) Se $A \models \neg A$ allora $\neg A \in \textsc{Taut}$
(7) Se $A, B \models C$ allora ($A \models C$ o $B \models C$)
(8) Se $A \models C$ allora $A, B \models C$
(9) Se $A \models (B \lor C)$ allora $A \models B$ o $A \models C$

**Esercizio** Trovare forme normali CNF e DNF per le proposizioni seguenti.

(1) $((A \land (B \lor C)) \lor (B \land (A \lor C)))$
(2) $((\neg A \lor (A \land \neg B)) \land (C \lor (\neg A \land B))$
(3) $(A \to (B \leftrightarrow C))$

**Esercizio** Trovare forme normali CNF e DNF per le proposizioni $A$, $B$, $C$ definite dalla seguente tavola di verità.

---

Note preparate da Lorenzo Carlucci, carlucci@di.uniroma1.it. Alcuni degli esercizi proposti sono tratti dai manuali di E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, e di M. Davis, R. Segal, E. Weyuker, *Computability, Complexity and Languages*.

| $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $A$ | $B$ | $C$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**Esercizio** Dimostrare

$$(A \to B), (C \vee \neg B), \neg(A \wedge C) \models \neg A$$

nei due modi seguenti.

(1) Dimostrare che $(((A \to B) \wedge (C \vee \neg B) \wedge \neg(A \wedge C)) \to \neg A) \in \textsc{Taut}$ riducendo a CNF,
(2) Dimostrare che $((A \to B) \wedge (C \vee \neg B) \wedge \neg(A \wedge C) \wedge A) \in \textsc{UnSat}$ riducendo a DNF.

**Esercizio** Se so che $A \to B$ ha valore 1, che cosa posso concludere del valore di verità delle proposizioni seguenti?

$$((A \vee C) \to (B \vee C)), \ \ ((A \wedge C) \to (B \wedge C)), \ \ ((\neg A \wedge B) \leftrightarrow (A \vee B))$$

**Esercizio** Se so che $A \leftrightarrow B$ ha valore 0, che cosa posso concludere del valore di verità delle proposizioni seguenti?

$$(A \wedge B), \ \ (A \vee B), \ \ (A \to B), \ \ ((A \wedge C) \leftrightarrow (B \wedge C))$$

**Esercizio** Se so che $A \leftrightarrow B$ ha valore 1, che cosa posso concludere del valore di verità delle proposizioni seguenti?

$$(A \wedge B), \ \ (A \vee B), \ \ (A \to B), \ \ ((A \wedge C) \leftrightarrow (B \wedge C))$$

**Esercizio** Dimostrare che

$$A \wedge (A \vee B) \equiv A$$

(Suggerimento: dimostrare che $A \to (A \wedge (A \vee B))$ e $(A \wedge (A \vee B)) \to A$ sono entrambe tautologie)

**Esercizio** Dimostrare le seguenti equivalenze logiche.

(1) $A \to B \equiv A \leftrightarrow (A \wedge B)$
(2) $A \to B \equiv B \leftrightarrow (A \vee B)$
(3) $A \wedge B \equiv (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \vee B)$
(4) $A \leftrightarrow B \equiv (A \vee B) \to (A \wedge B)$

**Esercizio** Dimostrare il seguente Lemma visto a lezione, dimostrando per contrapposizione le implicazioni (1) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (3) e (3) $\Rightarrow$ (1) (cioè dimostrando: ($\neg$ (2) $\Rightarrow$ $\neg$ (1)), ($\neg$ (3) $\Rightarrow$ $\neg$ (2)), e ($\neg$ (1) $\Rightarrow$ $\neg$ (3))).

**Lemma 0.1.** *Siano $A_1, \ldots, A_n, A$ proposizioni. Allora i seguenti punti sono equivalenti.*

(1) $A_1, \ldots, A_n \models A$.
(2) $((A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \to A) \in \textsc{Taut}$.
(3) $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge \neg A) \in \textsc{UnSat}$.

**Esercizio** Per ciascuna delle proposizioni seguenti, disegnare il circuito associato e trovare un circuito equivalente con meno interruttori (ossia una proposizione equivalente con meno occorrenze di variabili proposizionali $A, B, C, D, E$).

(1) $(A \wedge B) \vee ((C \vee A) \wedge \neg B)$
(2) $(C \wedge (A \vee \neg B)) \vee (\neg C \wedge A) \vee ((C \vee \neg B)\neg C)$
(3) $(B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$
(4) $(A \vee B \vee C \vee D) \wedge (A \vee B \vee D) \wedge (A \vee C)$

**Esercizio** Formalizzare i seguenti enunciati usando il linguaggio proposizionale composto da variabili $f_{i,j}$ per $i \in \{1,2,3\}$ e $j \in \{1,2,3,4\}$ con il significato intuitivo di $f(i) = j$.

(1) $f$ è la funzione costante con dominio $\{1,2,3\}$ e valore 4.
(2) $f$ è una relazione funzionale (i.e., una funzione) con dominio $\{1,2,3\}$ e immagine contenuta in $\{1,2,3,4\}$.
(3) $f$ è una funzione suriettiva con dominio contenuto in $\{1,2,3\}$ e codominio $\{1,2,3,4\}$.
(4) $f$ è una funzione iniettiva con dominio $\{1,2,3\}$ e codominio $\{1,2,3,4\}$.

**Esercizio** Formalizzare i seguenti enunciati usando il linguaggio proposizionale composto da variabili $a_i$ e $b_i$ con $i \in \{1,2,3,4\}$ con significato intuitivo $i \in A$ e $i \in B$, rispettivamente.

(1) $A$ è un sottinsieme non vuoto di $\{1,2,3,4\}$.
(2) $A$ e $B$ sono sottinsiemi non vuoti di $\{1,2,3,4\}$ tali che $A \cap B = \varnothing$.
(3) $A$ e $B$ sono sottinsiemi non vuoti di $\{1,2,3,4\}$ tali che $A \cup B = \{1,2,3,4\}$.
(4) $A$ e $B$ sono sottinsiemi non vuoti di $\{1,2,3,4\}$ tali che $A \subset B$ e $A \neq B$.

**Esercizio** Dimostrare usando il metodo dei tableaux.

(1) $((A \to B) \wedge (C \vee \neg B) \wedge \neg(A \wedge C) \wedge A) \in \textsc{UnSat}$
(2) $(((A \to (B \to C)) \wedge (A \wedge B)) \to C) \in \textsc{Taut}$
(3) $(((C \wedge (A \vee \neg B)) \vee (\neg C \vee A) \vee ((C \vee \neg B) \wedge \neg C)) \to (A \vee \neg B)) \in \textsc{Taut}$

**Esercizio** Vero o falso? Argomentare. (N.B. $A$ e $B$ sono proposizioni arbitrariamente complesse).

(1) Se il tableau di $A \vee B$ ha tutti i rami chiusi allora $\neg A \in \textsc{Taut}$
(2) Se il tableau di $\neg(A \wedge \neg B)$ ha qualche ramo aperto allora esiste un assegnamento $\alpha$ tale che $\alpha(A) = \alpha(B)$.
(3) Se $\neg(A \to B)$ è una tautologia allora il tableau di $\neg A$ e il tableau di $B$ hanno tutti i rami chiusi.
(4) Se $(A \to B)$ è una tautologia allora il tableau di $A$ e il tableau di $\neg B$ hanno tutti i rami chiusi.