Soluzioni compito scritto del 24- 06 - 2013

1. Quale delle seguenti proposizioni è vera? Per ogni coppia A e B di insiemi:

- se $A \cup B = B$ e $A \cap B = B$ allora $A = B$ ☑
- se $A - B = \emptyset$ allora $A = B$ ☐
- se $B - A = \emptyset$ allora $A = B$ ☐
- se $A - B = \emptyset$ e $B - A = \emptyset$ allora $A = B$ ☑
- nessuna delle precedenti ☐

2.

- Definire, se esiste, una funzione che, se considerata come relazione, sia antiriflesiva e transitiva.

[non esiste a meno che non sia la funzione vuota]

- Definire due funzioni f e g sui numeri naturali, diverse dall'identità, la cui composizione sia una relazione di equivalenza.

[f = {(0,1), (1,0), (2,3), (3,2)…} e g la sua inversa. La composizione è l'identità.]

3. Dimostrare (per induzione) che

$$\sum_{k=1,\dots n} k^2 = (n(n+1)(2n+1))/6$$

- passo base verficato osservando $1^2 = 1$

- passo induttivo: supponiamo $\sum_{k=1,\dots n} k^2 = (n(n+1)(2n+1))/6$
e dimostriamo $\sum_{k=1,\dots n+1} k^2 = ((n+1)(n+2)(2(n+1)+1)/6$

$\sum_{k=1,\dots n+1} k^2 = \sum_{k=1,\dots n} k^2 + (n+1)^2 = (n(n+1)(2n+1))/6 + (n+1)^2 = ((n+1)(n+2)(2(n+1)+1)/6$
Si verifica facendo i calcoli.

4. Si dimostri che il seguente enunciato è un teorema usando il metodo di Hilbert

$$(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (C \rightarrow (B \rightarrow \neg A))$$

1. $\vdash (B \rightarrow \neg A) \rightarrow (C \rightarrow (B \rightarrow \neg A))$ Ax1
2. $\vdash (A \rightarrow \neg B) \rightarrow (C \rightarrow (B \rightarrow \neg A))$ contr

5 . Si dimostri che la seguente formula è soddisfacibile usando il metodo dei tableau

$$\forall x \exists z \forall y\ P(x,y,z) \rightarrow \exists z \forall x \forall y\ P(x,y,z)$$

Il tableau della formula è aperto

6 Trovare un modello per la formula di cui al punto 5

Basta prendere $|P| = \emptyset$