

FILA A

Ognuno dei seguenti quesiti può avere più risposte esatte (o nessuna); indicare con una crocetta tutte quelle che si ritengono corrette.

1. Sia S un sistema deduttivo corretto per la logica dei predicati. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

1. se P è dimostrabile in S , allora P deve essere dimostrabile in ogni altro sistema S'
2. se P non è dimostrabile in S , allora P non vale in alcun modello
3. se in S si riesce a dimostrare che P è una tautologia, allora P vale in ogni modello
4. se P è valida, allora P deve essere dimostrabile in S
5. se P è dimostrabile in S , allora esiste un modello in cui P vale

2. Nel sistema di Hilbert, quali delle seguenti derivazioni della formula A a partire dall'insieme di ipotesi $\{A\}$ è corretta?

1.

1.	A	ipotesi
2.	$(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$	assioma
3.	$A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$	assioma
4.	$(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$	MP 2 3
5.	$(A \rightarrow (A \rightarrow A))$	assioma
6.	$A \rightarrow A$	MP 4 5
7.	A	MP 6 1

2. [1. A ipotesi

3. [1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ assioma
2. A ipotesi

4. [1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ assioma
2. A ipotesi
3. $B \rightarrow A$ MP 1 2
4. B ipotesi
5. A MP 3 4

5. [1. $A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$ assioma
2. $A \rightarrow (A \rightarrow A)$ assioma
3. A MP 1 2

3. Si consideri la formula $\phi = \exists x \forall y. \neg(P(x, y) \Rightarrow P(y, x))$ del calcolo dei predicati, e la seguente applicazione del metodo dei tableaux:

$$\begin{array}{c}
 \neg(\exists x \forall y. \neg(P(x, y) \Rightarrow P(y, x))) \\
 | \\
 \forall x \exists y. P(x, y) \Rightarrow P(y, x) \\
 | \\
 \forall x \exists y. P(x, y) \Rightarrow P(y, x), \exists y. P(a, y) \Rightarrow P(y, a) \\
 | \\
 \forall x \exists y. P(x, y) \Rightarrow P(y, x), P(a, a) \Rightarrow P(a, a) \\
 | \\
 \forall x \exists y. P(x, y) \Rightarrow P(y, x), P(a, a), \neg P(a, a) \\
 \diamond
 \end{array}$$

Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

1. la derivazione dimostra che ϕ è valida
2. la derivazione dimostra che ϕ è contraddittoria
3. la derivazione è sbagliata e quindi ϕ è contraddittoria
4. la derivazione è sbagliata ma ϕ è valida
5. la derivazione è sbagliata ma ϕ è soddisfacibile

4. Quale delle seguenti interpretazioni dei simboli P, Q, R, S e T rende vera la seguente formula? Un consiglio: se vedete che ci mettete più di 30 secondi a rispondere, probabilmente state facendo più lavoro del necessario: analizzate bene la formula!

$$(P \rightarrow \neg P) \wedge (P \rightarrow (((((P \rightarrow Q) \rightarrow R) \rightarrow \neg S) \rightarrow T) \rightarrow P))$$

1. $P = \text{vero}, Q = \text{falso}, R = \text{falso}, S = \text{falso}, T = \text{falso}$
2. $P = \text{falso}, Q = \text{falso}, R = \text{falso}, S = \text{falso}, T = \text{falso}$
3. $P = \text{falso}, Q = \text{vero}, R = \text{falso}, S = \text{vero}, T = \text{falso}$
4. $P = \text{falso}, Q = \text{falso}, R = \text{vero}, S = \text{falso}, T = \text{vero}$
5. $P = \text{falso}, Q = \text{falso}, R = \text{falso}, S = \text{vero}, T = \text{vero}$

5. Si consideri la seguente formula del calcolo dei predicati

$$\forall x \exists y \forall z. P(x, y) \wedge P(y, z) \wedge Q(x, z)$$

Tale formula è soddisfacibile. Quali tra i seguenti ne sono un possibile modello?

1. l'universo sono i naturali, $P(a, b)$ sta per " $a < b$ " e $Q(a, b)$ sta per " $a \neq b$ "
2. l'universo sono i naturali, $P(a, b)$ sta per " $a > b$ " e $Q(a, b)$ sta per " $a \neq b$ "
3. l'universo sono i naturali, $P(a, b)$ sta per " $a \neq b$ " e $Q(a, b)$ sta per " $a \neq b$ "
4. l'universo sono i reali, $P(a, b)$ sta per " $a > b$ " e $Q(a, b)$ sta per " $a \neq b$ "
5. l'universo sono gli interi, $P(a, b)$ sta per " $a - b = 0$ " e $Q(a, b)$ sta per " $a = b$ "
6. l'universo sono gli esseri umani di sesso maschile, $P(a, b)$ sta per " a è padre di b " e $Q(a, b)$ sta per " a è nonno di b "

FILA B

Ognuno dei seguenti quesiti può avere più risposte esatte (o nessuna); indicare con una crocetta tutte quelle che si ritengono corrette.

1. Sia S un sistema deduttivo completo per la logica dei predicati. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

1. se P è dimostrabile in S , allora P deve essere dimostrabile in ogni altro sistema S'
2. se P non è dimostrabile in S , allora P non vale in alcun modello
3. se in S si riesce a dimostrare che P è una tautologia, allora P vale in ogni modello
4. se P è valida, allora P deve essere dimostrabile in S
5. se P è dimostrabile in S , allora esiste un modello in cui P vale

2. Nel sistema di Hilbert, quali delle seguenti derivazioni della formula A a partire dall'insieme di ipotesi $\{A\}$ è corretta?

1.

1.	1. $(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A))$	assioma
	2. A	ipotesi

2.

2.	1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$	assioma
	2. A	ipotesi
	3. $B \rightarrow A$	MP 1 2
	4. B	ipotesi
	5. A	MP 3 4

3.

3.	1. $(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$	assioma
	2. A	ipotesi
	3. $A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$	assioma
	4. $(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$	MP 1 3
	5. $(A \rightarrow (A \rightarrow A))$	assioma
	6. $A \rightarrow A$	MP 4 5
	7. A	MP 6 2

4.

4.	1. A	ipotesi
----	--------	---------

5.

5.	1. $A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$	assioma
	2. $A \rightarrow (A \rightarrow A)$	assioma
	3. A	MP 1 2

3. Si consideri la formula $\phi = \exists x \forall y. P(x, y) \wedge \neg P(y, x)$ del calcolo dei predicati, e la seguente applicazione del metodo dei tableaux:

$$\begin{array}{c}
 \exists x \forall y. P(x, y) \wedge \neg P(y, x) \\
 | \\
 \forall y. P(a, y) \wedge \neg P(y, a) \\
 | \\
 \forall y. P(a, y) \wedge \neg P(y, a), P(a, a) \wedge \neg P(a, a) \\
 | \\
 \forall y. P(a, y) \wedge \neg P(y, a), P(a, a), \neg P(a, a) \\
 \diamond
 \end{array}$$

Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

1. la derivazione dimostra che ϕ è valida
2. la derivazione dimostra che ϕ è contraddittoria
3. la derivazione è sbagliata ma ϕ è valida
4. la derivazione è sbagliata ma ϕ è soddisfacibile
5. la derivazione è sbagliata e ϕ è contraddittoria

4. Quale delle seguenti interpretazioni dei simboli P, Q, R, S e T rende vera la seguente formula? Un consiglio: se vedete che ci mettete più di 30 secondi a rispondere, probabilmente state facendo più lavoro del necessario: analizzate bene la formula!

$$(Q \rightarrow \neg Q) \wedge (P \rightarrow (((\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow R) \rightarrow \neg S) \rightarrow T) \rightarrow P))$$

1. $P = \text{falso}, Q = \text{falso}, R = \text{falso}, S = \text{falso}, T = \text{falso}$
2. $P = \text{vero}, Q = \text{vero}, R = \text{falso}, S = \text{vero}, T = \text{falso}$
3. $P = \text{falso}, Q = \text{falso}, R = \text{vero}, S = \text{falso}, T = \text{vero}$
4. $P = \text{falso}, Q = \text{falso}, R = \text{falso}, S = \text{vero}, T = \text{vero}$
5. $P = \text{falso}, Q = \text{falso}, R = \text{falso}, S = \text{falso}, T = \text{falso}$

5. Si consideri la seguente formula del calcolo dei predicati

$$\forall x \exists y \forall z. P(x, y) \wedge P(y, z) \wedge Q(x, z)$$

Tale formula è soddisfacibile. Quali tra i seguenti non ne sono un modello?

1. l'universo sono gli esseri umani di sesso maschile, $P(a, b)$ sta per "a è padre di b" e $Q(a, b)$ sta per "a è nonno di b"

2. l'universo sono i reali, $P(a, b)$ sta per " $a > b$ " e $Q(a, b)$ sta per " $a \neq b$ "
3. l'universo sono gli interi, $P(a, b)$ sta per " $a - b = 0$ " e $Q(a, b)$ sta per " $a = b$ "
4. l'universo sono i naturali, $P(a, b)$ sta per " $a > b$ " e $Q(a, b)$ sta per " $a \neq b$ "
5. l'universo sono i naturali, $P(a, b)$ sta per " $a \neq b$ " e $Q(a, b)$ sta per " $a \neq b$ "
6. l'universo sono i naturali, $P(a, b)$ sta per " $a < b$ " e $Q(a, b)$ sta per " $a \neq b$ "

SOLUZIONI FILA A: Le crocette andavano messe alle seguenti risposte:

1. numero 3 e 5
2. numero 1, 2 e 3
3. numero 5
4. numero 2, 3, 4 e 5
5. nessuna crocetta andava messa (nessuna proposta forniva un modello)

SOLUZIONI FILA B: Le crocette andavano messe alle seguenti risposte:

1. numero 4
2. numero 1, 3 e 4
3. numero 4
4. numero 1, 3, 4 e 5
5. numero 1, 2, 3, 4, 5 e 6 (nessuna proposta forniva un modello)